

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и  
вычислительной математики

**Представление конечных детерминированных автоматов конечными рядами  
Фурье**

---

наименование темы бакалаврской работы полужирным шрифтом

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента   4   курса   411   группы

направления   01.03.02 – Прикладная математика и информатика    
код и наименование направления

  механико-математического факультета    
наименование факультета

**Васильева Никиты Львовича**

---

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель  
Старший преподаватель

**С.И Поликарпов**

---

должность, уч. степень, уч. звание

---

подпись, дата

---

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой  
д.ф-м.н., профессор

**В.А. Юрко**

---

должность, уч. степень, уч.эвание

---

подпись, дата

---

инициалы, фамилия

## ВВЕДЕНИЕ

Различные способы задания автоматов (диаграммы Мура, таблицы, системы канонических логических уравнений, матрицы, формулы языка регулярных выражений) основываются на рекурсии: последовательно определяются такты функционирования автомата и указываются правила рекурсивного совмещения тактов в процессе функционирования. Указанными способами задания автоматов явно выделяются только начальные фрагменты возможных вариантов функционирования. Это существенно затрудняет представление функционирования автомата на всей оси абстрактного времени.

Для того, чтобы заменить рекурсивное задание законов функционирования автомата явным определением функций  $\delta$  и  $\lambda$  на всей оси абстрактного времени, было предложено представление автоматов геометрическими образами в специальных словарных геометриях. На содержательном уровне геометрический образ совпадает с ломаной линией.

В данной работе рассматривается задача о представлении геометрического образа конечного детерминированного автомата рядом Фурье. Для этого предварительно решен вопрос о возможности задания геометрического образа автомата на основе разложения в ряд Фурье закона функционирования автомата. Показано, что геометрические образы задаются рядами Фурье. Разработаны алгоритм построения ряда Фурье по заданному закону функционирования автомата и алгоритм восстановления по заданному ряду Фурье закона функционирования автомата. С использованием этих алгоритмов при решении задач анализа, синтеза, распознавания автоматов оказывается применим аппарат теории рядов Фурье.

Работа состоит из введения, трех разделов и двух приложений. Во введении описывается решаемая проблема и ее актуальность, содержатся краткие сведения о данной работе.

В первом разделе содержатся сведения о функциях, автоматных отображениях и автоматах, также описывается метод построения таблицы переходов и выходов автомата по отрезку геометрического образа автомата.

Во втором разделе содержится классификация геометрических образов автоматных отображений и дается описание метода определения функций

переходов и выходов автомата по геометрической кривой линии. В третьем разделе показывается, как конечный детерминированный автомат представляется рядом Фурье.

В приложении А приводится программа, которая вычисляет значения косинусов и синусов в системе базисных функций. В приложении Б приводится программа, которая вычисляет значение композиции автоматов  $A_1, \dots, A_{30}$ , где элемент  $\Sigma$  задается равенством:

$$\lambda_{\Sigma}(s_{\Sigma 0}, x) = \frac{a_0}{2}\{y_1\} + a_1\{y_2\} + b_1\{y_3\} + a_2\{y_4\} + \dots + b_{14}\{y_{29}\} + \frac{a_{15}}{2}\{y_{30}\}$$

## Основное содержание работы

В первом разделе рассматривается метод построения таблицы переходов и выходов автомата по отрезку геометрического образа автомата:

Пусть в системе координат с осями  $(X^*, \omega_1)$  и  $(Y, \omega_2)$  задана часть

$$\begin{aligned} & (p_1x_1, y_{11}), (p_1x_2, y_{12}), \dots, (p_1x_m, y_{1m}), (p_2x_1, y_{21}), (p_2x_2, y_{22}), \dots \\ & \dots, (p_2x_m, y_{2m}), \dots, (p_kx_1, y_{k1}), (p_kx_2, y_{k2}), \dots, (p_kx_m, y_{km}) \end{aligned} \quad (1)$$

геометрического образа  $\gamma_{s_\varepsilon}$ .

**Этап 1.** Последовательности (1) сопоставляется последовательность состояний автомата

$$S_{p_1}, S_{p_2}, \dots, S_{p_k} \quad (2)$$

при соответствии каждому состоянию  $S_{p_i}, 1 \leq i \leq k$  множества  $\{(p_ix_1, y_{i1}), (p_ix_2, y_{i2}), \dots, (p_ix_m, y_{im})\}$ .

**Этап 2.** Функция переходов  $\delta$  для состояний (2) определяется равенством  $\delta^*(s_{p_i}, p_j) = s_{p_i p_j}$

**Этап 3.** Функция выходов  $\lambda$  для состояний (2) и множества выходных сигналов  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  определяется системой равенств

$$Y_{ij} = \lambda(s_{p_i}, x_j), \quad 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m \quad (3)$$

**Этап 4.** Множество состояний (2) дополняется и функции  $\delta, \lambda$  доопределяются так, чтобы частичное определение функции переходов и выходов, полученное реализацией этапов (2) и (3), расширилось до полного задания функций. (Например, во всех случаях, когда при некотором  $x \in X$   $\delta(s_{p_i}, x) = s_{p_i}$  и  $p_k \prec p_i x$ , равенство  $\delta^*(s_{p_i}, p_j) = s_{p_i p_j}$  заменяется равенством  $\delta(s_{p_i}, x) = s_{p_i}$ . Возможны другие варианты переходов от частично определенных функций к полностью определенным функциям).

**Этап 5.** Автомат с построенными и полностью определенными на этапах (1)-(5) функциями  $\delta$  и  $\gamma$  минимизируется по числу состояний.

**Замечание 1.** Часть геометрического образа  $\gamma_{s_\varepsilon}$  при  $p_1 \neq \varepsilon$  может не быть частью геометрического образа инициального автомата  $(A, s_{p_1})$ , так как не все состояния, перечисленные в последовательности (2), могут быть достижимыми из состояния  $s_{p_1}$ . В связи с этим метод содержит этап б -исключения недостижимых из  $s_{p_1}$  состояний.

**Во втором разделе** описана классификация геометрических образов автоматных отображений, дается описание метода определения функций переходов и выходов автомата по геометрической кривой линии:

Пусть на геометрической кривой линии  $L$ , аналитически заданной уравнением  $y = f(x)$ , рассматривается размещение пар из автоматного отображения

$$\rho_{s_0}^A = \bigcup_{px \in X^*X} \{(px, \lambda(\delta(s_0, p), x))\},$$

соответствующего автомату  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ . Предположим, что используется область  $Q$  из общего задания кривой линии  $L$  и в этой области вторые координаты точек линии  $L$  расположены в полуинтервале  $[\alpha, \beta]$ . Введем требуемые структуры и обозначения. В качестве клетки на плоскости будем рассматривать область, ограниченную прямоугольником со сторонами размерности  $d_1$  и  $d_2$ , параллельными, соответственно, осям абсцисс и ординат в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости. На рисунке (1) показана клетка, периметр которой разбит на 8 ориентированных полуинтервалов с указанными для них номерами.

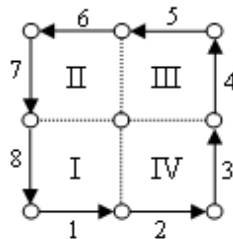


Рисунок 1 — Нумерация полуинтервалов в периметре клетки.

Покрытие области  $Q$  сеткой с клетками, в которых определены полуинтервалы периметров, используется для представления пересечений геометрической кривой линии  $L$  с периметрами клеток сетки. Предполагается, что после введения ориентации для кривой  $L$ , некоторые клетки сетки имеют одну или несколько пар точек "входа" и "выхода" кривой в клетку.

Это означает, что все точки на полуинтервале, соответствующие входу кривой в клетку (соответствующие выходу кривой из клетки), получают взаимно-однозначно сопоставленный код. Метод кодирования точек для геометрических образов автоматных отображений включает следующие этапы.

**Этап 1.** Для заданной геометрической кривой линии  $L$ , определенной уравнением  $y = f(x)$ , выбираются область рассмотрения кривой и полуинтервал  $[\alpha, \beta)$ .

**Этап 2.** Выбирается размер  $d_1 \times d_2$  клеток сетки и на оси ординат определяются полуинтервалы  $[\alpha, \alpha + 0.5d_2)$ ,  $[\alpha + 0.5d_2, \alpha + d_2)$ ,  $\dots$ ,  $[\alpha + r\alpha 0.5d_2, \beta)$ , где  $\beta - (\alpha + r\alpha 0.5d_2) \leq 0.5d_2$ . Каждому из построенных полуинтервалов взаимно-однозначно сопоставляется выходной сигнал. В результате устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами множества полуинтервалов и элементами множества выходных сигналов  $Y = y_1, y_2, \dots, y_r$ .

**Этап 3.** На оси абсцисс выбирается полуинтервал  $[\alpha', \beta')$  и этот полуинтервал разбивается на полуинтервалы  $[\alpha', \alpha' + 0.5d_1)$ ,  $[\alpha' + 0.5d_1, \alpha' + d_1)$ ,  $\dots$ ,  $[\alpha' + r'\alpha' 0.5d_1, \beta')$ , где  $\beta' - (\alpha' + r'\alpha' 0.5d_1) \leq 0.5d_1$ .

**Этап 4.** В соответствии с построенными полуинтервалами на осях абсцисс и ординат определяется сетка, покрывающая рассматриваемую область  $Q$  для геометрической кривой  $L$ .

**Этап 5.** Все пересечения линии  $L$  (все пары точек входа и выхода линии) с периметрами клеток сетки линейно упорядочиваются и нумеруются, образуя последовательность

$$E = \langle e_1, e_2, \dots, e_c \rangle \quad (4)$$

**Этап 6.** Последовательность (4) преобразуется на основе замены каждого элемента  $e_t, 1 \leq t \leq C$ , соответствующим кодом. Для компонент пары  $e_t$

определяются полуинтервалы периметра клетки, которым принадлежат точка входа линии  $L$  и точка выхода линии  $L$  из клетки. По этим данным определяется код для  $e_t$ . В результате последовательность  $E$  оказывается преобразованной в последовательность

$$H = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_c} \rangle . \quad (5)$$

**Этап 7.** Последовательность  $H$  определяет  $C$  первых точек геометрического образа автоматного отображения по правилу:

- элементам последовательности  $H$  сопоставляются  $C$  первых по линейному порядку  $\omega_1$  элементов линейно упорядоченного множества  $(X^*, \omega_1)$ ;
- каждому элементу  $a_{i_t}, 1 \leq t \leq C$ , сопоставляется выходной сигнал  $y \in Y$ , определяемый связью клетки с полуинтервалами на оси ординат.

В результате последовательность  $H$  получает интерпретацию как последовательность  $C$  пар из символьного автоматного отображения.

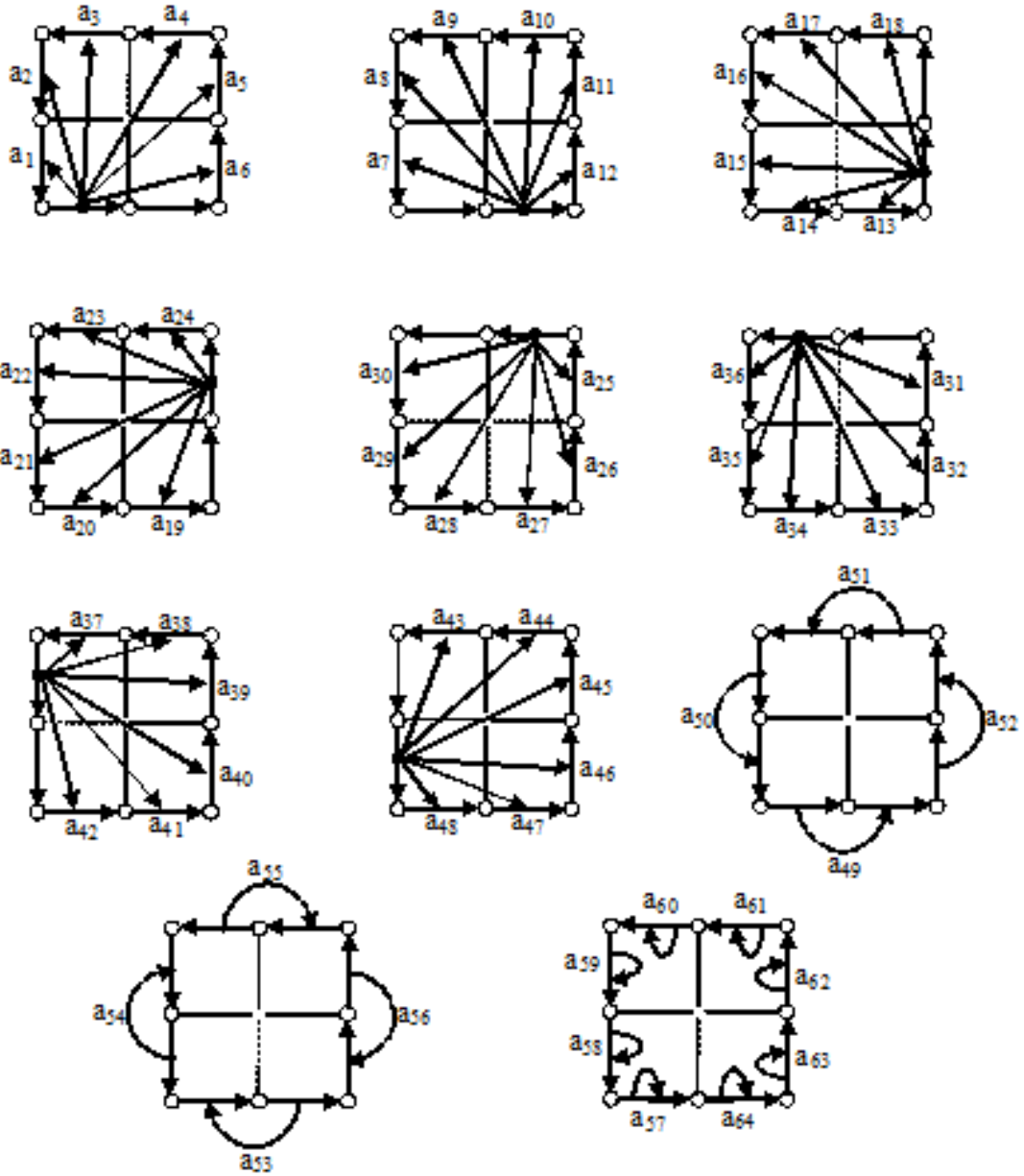


Рисунок 2 — Коды вариантов связей полуинтервалов для представления пересечений геометрической кривой с периметрами клеток.

Например, для  $C = 10$  и  $X = \{x_1, x_2\}$  получаем определенными следующие пары из автоматного отображения:

$$(x_1, y_{j_1}), (x_2, y_{j_2}), (x_1x_1, y_{j_3}), (x_1x_2, y_{j_4}), \dots (x_1x_2x_2, y_{j_{10}}),$$

где  $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_{10}}$  определяются свойствами геометрической линии  $L$ .

В третьем разделе строится базисная ортогональная система, также по геометрическим образам восстанавливаются базисные автоматы.



Будем рассматривать периодический (с периодом, равным 30) геометрический образ автомата  $A$ , который изображен на рисунке (3).

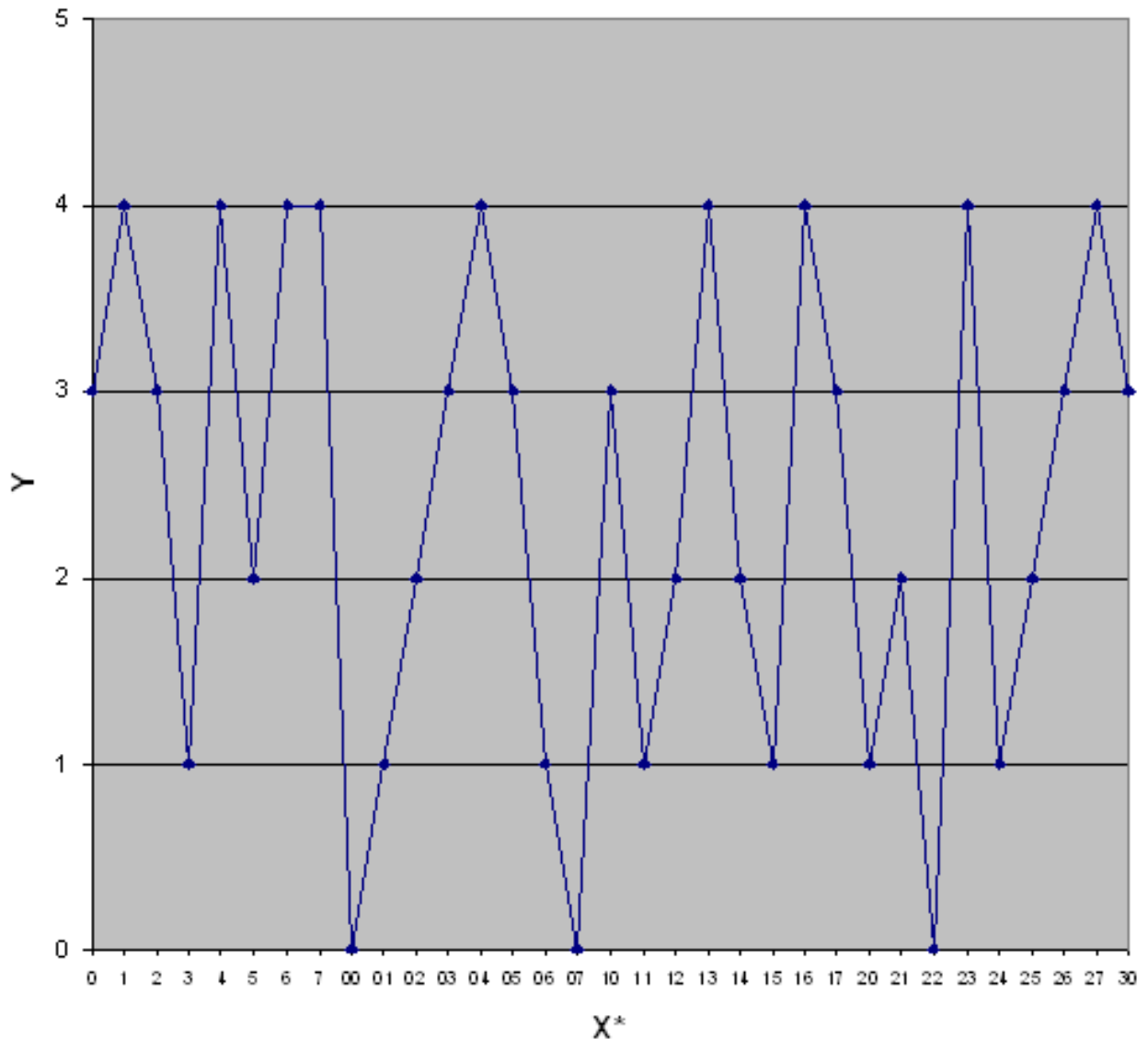


Рисунок 3

Пусть  $A = (S, X, Y, \delta, \lambda)$ , где  $S = \{s_1, \dots, s_5\}$ ,  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  – конечный детерминированный автомат. Присвоим первым тридцати словам на оси  $X^*$  следующие номера:  $0, 1, 2, \dots, 29$ . Ломаной  $\gamma_{s_0}$  являющейся геометрическим образом автомата  $A$  в целочисленной геометрии  $\Gamma_1$ , сопоставим конечный ряд Фурье, построенный разложением по следую-

щей системе из 30 базисных функций:

$$\begin{aligned} & 1; \cos \frac{\pi x}{15}; \sin \frac{\pi x}{15}; \cos \frac{2\pi x}{15}; \sin \frac{2\pi x}{15}; \cos \frac{\pi x}{5}; \sin \frac{\pi x}{5}; \cos \frac{4\pi x}{15}; \sin \frac{4\pi x}{15}; \cos \frac{\pi x}{3}; \sin \frac{\pi x}{3}; \cos \frac{6\pi x}{15}; \\ & \sin \frac{6\pi x}{15}; \cos \frac{7\pi x}{15}; \sin \frac{7\pi x}{15}; \cos \frac{8\pi x}{15}; \sin \frac{8\pi x}{15}; \cos \frac{9\pi x}{15}; \sin \frac{9\pi x}{15}; \cos \frac{3\pi x}{3}; \sin \frac{2\pi x}{3}; \cos \frac{11\pi x}{15}; \sin \frac{11\pi x}{15}; \\ & \cos \frac{12\pi x}{15}; \sin \frac{12\pi x}{15}; \cos \frac{13\pi x}{15}; \sin \frac{13\pi x}{15}; \cos \frac{14\pi x}{15}; \sin \frac{14\pi x}{15}; \cos \pi x \} \end{aligned} \quad (6)$$

Система базисных функций (6) ортогональна на множестве точек  $\{0, 1, 2, \dots, 29\}$  а именно:

$$\sum_{x=0}^{29} \sin \frac{i\pi x}{15} \sin \frac{j\pi x}{15} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \text{ для } i, j = 1, 2, \dots, 14 \\ 15, & \text{если } i = j \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{x=0}^{29} \sin \frac{i\pi x}{15} \cos \frac{j\pi x}{15} = 0 \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 14 \text{ и } j = 0, 1, 2, \dots, 15 \quad (8)$$

$$\sum_{x=0}^{29} \cos \frac{i\pi x}{15} \cos \frac{j\pi x}{15} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 15, & \text{если } i = j \neq 0; 15 \text{ для } i, j = 0, 1, 2, \dots, 15 \\ 30, & \text{если } i = j = 0; 30 \end{cases} \quad (9)$$

Из этих соотношений ортогональности следует, что ряд Фурье, соответствующий ломаной  $\Gamma_{s_0}$ , имеет вид:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{29} (a_i \cos \frac{i\pi x}{15} + b_i \sin \frac{i\pi x}{15}) + \frac{a_{15}}{2} \cos \pi x \quad (10)$$

Где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{15} \sum_{x=0}^{29} \gamma_{s_0}(x) \\ a_i &= \frac{1}{15} \sum_{x=0}^{29} \gamma_{s_0}(x) \cos \frac{i\pi x}{15}; i = 1, \dots, 15 \\ b_i &= \frac{1}{15} \sum_{x=0}^{29} \gamma_{s_0}(x) \sin \frac{i\pi x}{15}; i = 1, \dots, 14 \end{aligned}$$

В точках  $\{0, 1, 2, 3, \dots, 29\}$  сумма ряда (10) в точности равна значениям ломаной  $\gamma_{s_0}(x)$ .

**В приложении А** Приведена программа, реализованная на языке C++, для подсчета значений косинусов и синусов в системе базисных функций, а также представлена таблица с различными вещественными значениями от -1 до 1.

Таблица 1

-1	-0,9945	-0,9781	-0,9510	-0,9135	-0,8660	-0,8090
-0,7431	-0,6691	-0,5877	-0,5	-0,4067	-0,3090	-0,2079
-0,1045	0	0,1045	0,2079	0,3090	0,4067	0,5
0,5877	0,6691	0,7431	0,8090	0,8660	0,9135	0,9510
0,9781	0,9945	1				

**В приложении Б** был проведен численный эксперимент, позволяющий убедиться в том, что композиция автоматов  $A_1, \dots, A_{30}$  задает исходный автомат  $A$ . Приведена программа реализованная на языке C++, которая вычисляет значение композиции автоматов  $A_1, \dots, A_{30}$ , где элемент  $\Sigma$  задается равенством:

$$\lambda_{\Sigma}(s_{\Sigma 0}, x) = \frac{a_0}{2}\{y_1\} + a_1\{y_2\} + b_1\{y_3\} + a_2\{y_4\} + \dots + b_{14}\{y_{29}\} + \frac{a_{15}}{2}\{y_{30}\}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрена задача представления автомата рядом Фурье. Показано, что геометрические образы задаются рядами Фурье. Исследованы алгоритм построения ряда Фурье по заданному закону функционирования автомата и алгоритм восстановления по заданному ряду Фурье закона функционирования автомата. Было установлено, что с использованием этих алгоритмов при решении задач анализа, синтеза, распознавания автоматов оказывается применим аппарат теории рядов Фурье.