

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

**О частном случае двухсолитонного решения
уравнения Кортвега - де Фриза на оси**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Корнейчука Дмитрия Алексеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Доцент,

к.ф.-м.н., доцент

должность, уч.степень, уч.звание

Зав.кафедрой

подпись, дата

С. Н. Кабанов

инициалы, фамилия

Зав. кафедрой, профессор,

доктор физ.-мат. наук

должность, уч.степень, уч.звание

подпись, дата

В.А. Юрко

инициалы, фамилия

Саратов 2016

Введение

Актуальность темы исследования. Уравнение Кортевега-де Фриза (уравнение КдФ) - нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка, играющее важную роль в теории нелинейных волн. Оно описывает процессы, происходящие в бездиссипативной среде с малой нелинейностью и дисперсией. Данное уравнение было получено для описания длинных волн на воде в конце XIX века, однако оценить по достоинству важность этого открытия смогли лишь спустя полвека. Именно тогда стало ясно, что это уравнение встречается во многих областях физики, а точнее оно применимо ко всем ситуациям, в которых рассматриваются нелинейные волны в средах со слабой дисперсией. Под дисперсией понимают зависимость скорости распространения от частоты и длины волны. Из этого следовало, что уединенная волна или солитон, которая описывается этим уравнением, является широко распространенным явлением.

Метод решения уравнения КдФ, предложенный в 1967 году в работе К. С. Гарднера, Дж. М. Грина, М. Д. Крускала и Р. М. Миуры, получил название «метод обратной задачи квантовой теории рассеяния», или короче «метод обратной задачи». Позднее В. Е. Захаров и А. Б. Шабат применили этот метод к другому важному для физики уравнению — нелинейному уравнению Шрёдингера. В дальнейшем при помощи метода обратной задачи были получены решения многих других нелинейных уравнений, модификация уравнения КдФ и получены периодические и почти периодические решения уравнения.

Цель бакалаврской работы состоит в разработке программного продукта для визуализации частного случая двух солитонного решения уравнения КдФ на оси.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач:

- Изучить метод обратной задачи рассеяния, используемый для получения решения уравнения Кортевега - де Фриза на оси;
- Изучить язык программирования высокого уровня C#
- Изучить программные способы динамического отображения графических данных
- Построить визуализацию частного случая двухсолитонного решения уравнения КДФ на оси.

Бакалаврская работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованных источников, приложений.

В введении дается общая характеристика работы: актуальность, цель, задачи.

В первой главе приводится краткая историческая справка, подчеркивается важность развития теории солитонов.

Во второй главе описывается метод обратной задачи для нахождения решения уравнения КДФ.

В третьей главе рассматривается принцип нелинейной суперпозиции.

В четвертой главе проводится анализ результатов визуализации двух солитонного уравнения КДФ.

В заключении приводятся результаты проделанной работы.

Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследования, ставятся цели и задачи.

В первой главе дается определения понятия солитон, приводится краткая историческая справка, позволяющая проследить историю развития теории солитонов.

Первым явления уединенной волны отметил Джон Скотт Рассел в 1834 году. Он же установил некоторые свойства этой волны. Одним из важнейших свойств было то, что уединенные волны проходят друг через друга без каких-либо изменений, как и малые волны, образованные на поверхности воды. Однако он не обратил на это существенного внимания. В дальнейшем именно благодаря этому свойству для солитонов нашлось широкое прикладное применение. Тот факт, что при взаимодействии друг с другом или с некоторыми другими возмущениями они не разрушаются, а продолжают движение, сохраняя свою структуру неизменной, позволяет использовать такие волны для передачи данных на большие расстояния без помех.

Понятие солитон впервые было введено Краскалом и Забужским. Пытаясь понять природу уединённых волн, они обратили внимание на факт, которому Рассел не предал особого значения. Проводя аналогию с частицами, Краскал и Забужский назвали такие волны солитонами.

Одной из простейших и наиболее известных моделей, допускающих существование солитонов в решении, является уравнение Кортевега — де Фриза нелинейное дифференциальное уравнения (НДУ) третьего порядка в частных производных

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Но действительный прорыв произошёл в 1967 г., когда Гарднер, Грин, Крускал и Миура предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши для уравнения КдФ. Вскоре после этого Лакс показал общий характер этого метода, что очень повлияло на будущие исследования. Несколько лет спустя Захаров и Шабат путем нетривиального распространения методов ГГКМ и Лакса смогли решить задачу Коши для другого важного нелинейного эволюционного уравнения, так называемого нелинейного уравнения Шредингера. Тем самым был открыт путь для поиска и открытия некоторых других нелинейных эволюционных уравнений или, скорее, классов уравнений, разрешимых этими методами, - процесс, не ослабевающий и по настоящее время

Во второй главе подробнее рассматривается уравнение КдФ и частный случай двухсолитонного решения уравнения на оси. Введенное в гидродинамике в 1895 г., оно играет очень важную роль и в теории, и в приложениях – физика плазмы и гидродинамика. Его важное теоретическое значение обусловлено тем, что это в некотором смысле самое простое из истинно нелинейных новых уравнений, не относящихся к классу уравнений в частных производных второго порядка, для которых существует достаточно общая теория (различающая, по крайней мере локально, три возможные формы поведения ращений – эллиптическое, гиперболическое и параболическое).

Для уравнения Кортевега — де Фриза найдено большое количество точных решений, представляющих собой стационарные нелинейные волны. В том числе, данное уравнение имеет решения солитонного типа следующего вида:

$$u(x, t) = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2 [\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)]}$$

где κ — свободный параметр, определяющий высоту и ширину солитона, а также его скорость, x_0 — также произвольная константа, зависящая от выбора начала отсчёта оси x . Особое значение солитонам придаёт тот факт, что любое начальное возмущение, экспоненциально спадающее на бесконечности, с течением времени эволюционирует в конечный набор солитонов, разнесённых в пространстве. Точный поиск этих решений может быть проведён регулярным образом при помощи метода обратной задачи рассеяния.

Простейшее решение, не имеющее вклада континуума, соответствует начальной функции $u_0(x)$, спектральные данные S_0 которой таковы, что коэффициент отражения равен нулю и есть только одно дискретное собственное значение:

$$S_0 = \{R(k) = 0, -\infty < k < \infty; p, \rho_0\},$$

$$u_0(x) = -2p^2/\text{ch}^2[p(x - \xi_0)],$$

где

$$\xi_0 = (2p)^{-1} \ln(\rho_0/2p).$$

Решение уравнения

$$u(x, t) = -2p^2/\text{ch}^2\{p[x - \xi(t)]\},$$

описывает волну постоянной формы, движущуюся с постоянной скоростью (солитон).

Замечательным свойством данного класса эволюционных уравнений является прямым следствием свойства коммутативности, примененного к простейшему преобразованию Бэнклуда является принцип нелинейной суперпозиции.

Уравнение КдФ, описывающее взаимодействие двух солитонов представляется в следующем виде:

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4 \operatorname{ch}(8t - 2x) + \operatorname{ch}(64t - 4x)}{[\operatorname{ch}(36t - 3x) + 3 \operatorname{ch}(28t - x)]^2}.$$

Которое удовлетворяет начальному условию

$$u_0(x) = -6 \operatorname{sech}^2 x,$$

Данное уравнение описывает двухсолитонную волну, которая распадается на два солитона при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$, и эффект нелинейного взаимодействия между ними. Этот эффект, описывается уравнением КдФ и сводится просто к тому, что их взаимное положение смещается по отношению к положению, которое они заняли бы, если бы взаимодействия не было.

В третьей главе рассматривается метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ.

Самым важным результатом усилий по изучению уравнения КдФ было открытие нового метода математической физики – метода обратной задачи рассеяния.

Метод обратной задачи рассеяния — аналитический метод решения задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений. Основан на связи нелинейного уравнения с данными рассеяния семейства вспомогательных линейных дифференциальных операторов, дающей возможность по эволюции данных рассеяния восстановить эволюцию решения нелинейного уравнения.

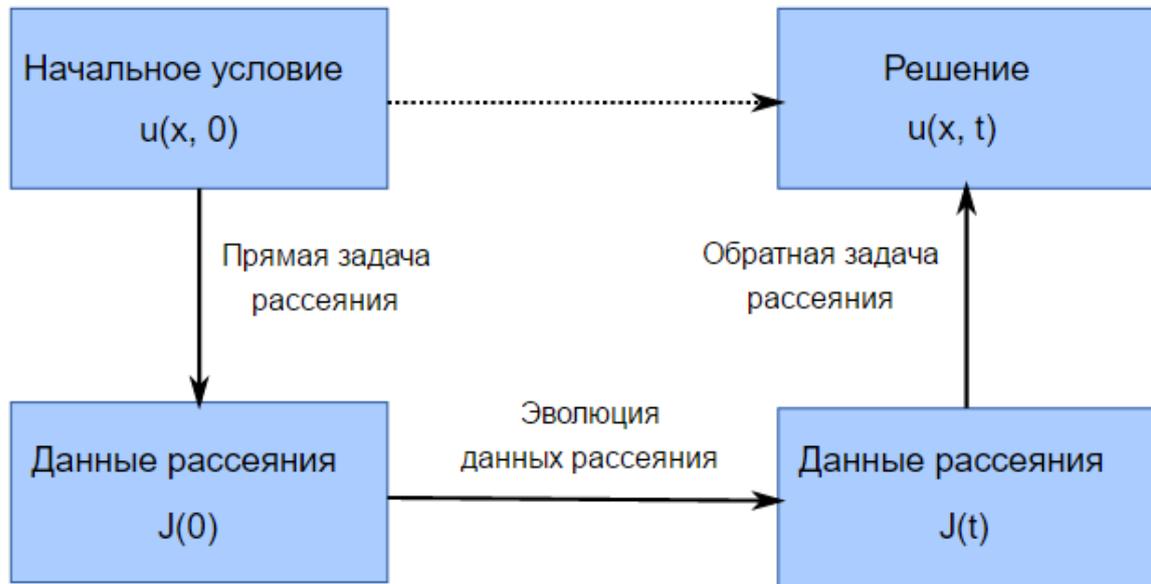
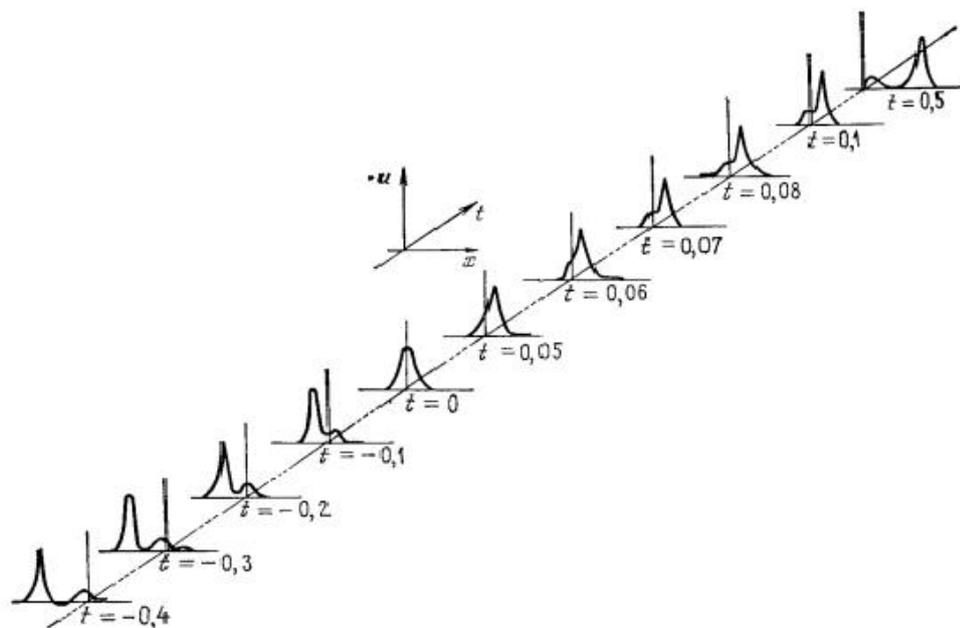


Схема метода обратной задачи рассеяния: по начальному условию $u(x, 0)$ находятся данные рассеяния $J(0)$, по ним строятся данные рассеяния $J(t)$, затем решается обратная задача рассеяния и находится решение $u(x, t)$ нелинейного уравнения.

В четвертой главе Проводится анализ результатов визуализации двухсолитонного решения уравнения КдФ на оси



На рисунке изображено взаимодействие двух отдельных солитонов движущихся с разными скоростями, равными 16 и 4, и амплитудами, равными 8 и 2. Они начинают движение с момента $t = -\infty$; при этом больший солитон следует за меньшим. Сначала больший солитон начинает «проглатывать» меньший, затем при $t = 0$ они сливаются, образуя единственную сдвоенную волну. При дальнейшем росте t появляется больший солитон, оставляя позади меньший. При $t = 0,5$ они снова разделяются. Такое поведение солитонов удивительно, так как, если не принимать во внимание разность фаз, оно подобно линейному взаимодействию.

Данное взаимодействие солитонов демонстрирует принцип нелинейной суперпозиции.

Заключение

В бакалаврской работе рассмотрены понятие солитона, уравнение Кортевега-де Фриза и его солитонные решения. Изучен метод обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ. Разработан программный продукт для визуализации двух солитонного уравнения КдФ на оси. Можно отметить, что полученная визуализация наглядно демонстрирует принцип нелинейной суперпозиции.

В заключение хотелось бы отметить, что в процессе выполнения бакалаврской работы наиболее полезным инструментом оказалась свободно распространяемая библиотека `DynamicDataDisplay`. Ее использование позволяет визуализировать различные данные. Все поставленные задачи были выполнены успешно.