Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Восстановление непрерывных периодических функций, заданных с погрешностью

наименование темы бакалаврской работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки __4___ курса __411___ группы

направления __01.03.02 – Прикладная математика и информатика___________
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета

Кухаревой Анастасии Васильевны
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
профессор кафедры
мат. физики и выч. мат.,
д.ф-м.н., профессор Г.В. Хромова

должность, уч. степень, уч. звание подпись,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор В.А. Юрко

должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойсивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа являются плохо поставленными. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Если исходные данные известны приближенно, то упомянутоя неустойчивость приводит к практической неединственности решения в рамках заданной точности и к большим трудностям в выяснении смысла получаемого приближенного решения. В силу этих особенностей долгое время считалось, что некорректно поставленные задачи не могут иметь практического значения.

Однако можно указать некорректно поставленные задачи, относящиеся как к классическим разделам математики, так и к различным классам практически важных прикладных задач. Это позволяет судить о широте рассматриваемого класса задач. К числу важных задач относятся задачи создания систем автоматической математической обработки результатов эксперемента, задачи оптимального управления и оптимального проектирования систем.

Одним из существенных этапов обработки является решение задач, неустойчивых к малым изменениям исходных данных. Поэтому не вызывает сомнения необходимость разработки методов решения таких задач. При этом приближенные решения, получаемые по приближенным исходным данным, должны быть устойчивыми к малым изменениям последних.

Исходные данные некорректно поставленных задач, получаемые обычно в результате измерений, содержат случайные погрешности. Поэтому при построении приближенных решений и при оценке их погрешности, в зависимости от характера исходной информации, возможен как детерминированный подход, так и вероятностный.

В данной работе рассматривается задача восстановления периодических функций с помощью детерминированного подхода [1]-[9]. Формулируются требования для корректности задачи восстановления в общей постановке [10]-[12]. Приводятся некоторые оценки погрешности [13]. Приводятся условия согласования параметра n с погрешностью δ при использовании методов частных сумм Фурье и Фейера. Решается известная задача из теории некорректно поставленных задач, так называемая задача восстановления непрерывной функции по ее среднеквадратичному приближению.

Работа состоит из введения, двух разделов и двух приложений.

Во введении описывается решаемая проблема и ее актуальность, содержатся краткие сведения о данной работе и о некоторых результатах, полученных в ходе численных экспериментов.

В первом разделе содержатся необходимые сведения о методах решения поставленной задачи. Вводятся линейные методы суммирования S_n и F_n. Приводятся теоремы об интегральном представлении сумм Фурье и Фейера, о нормах $\|S_n\|_{L2\to C}$ и $\|F_n\|_{L2\to C}$, а также некоторые сведения из теории приближения функций [13]-[16].

В втором разделе содержится постановка и решение задачи восстановления периодической функции с помощью сумм Фурье и Фейера, даются алгоритмы моделирования функции, заданной с погрешностью и восстановления непрерывной функции с периодическими краевыми условиями.

В приложениях А и Б приводятся программы [17]-[18] и результаты численного эксперимента по моделированию функции, заданной с погрешностью в метрике пространства $L_2[-\pi, \pi]$, и по решению задачи восстановления непрерывной периодической функции.

В автореферате приведен наилучшей из четырех полученных результов по численному решению задачи моделирования функции, заданной с погрешностью, и так же наилучший из четырех полученных результатов по численному решению задачи восстановления непрерывной периодической функции, заданной с погрешностью.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе рассматриваются методы, применяемые для решения задачи восстановления непрерывных периодических функций, заданных с погрешностью.

- Метод S_n частных сумм ряда Фурье.

Для периодической функции $\bar{f}(x)$ запишем её ряд Фурье:

$$\bar{f}(x) \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\, dt; a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \cos kt\, dt; b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \sin kt\, dt.$

Обозначим $S_n\bar{f}$ — частной суммой ряда Фурье.

Будем считать, что $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию:$\|S_n\bar{f} - \bar{f}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. [13]*(Интегральное представление сумм Фурье). Имеет место равенство:*

$$S_n\bar{f} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x,t)\bar{f}(t)\, dt,$$

где $K_n(x,t) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos k(t-x)]$.

Теорема 2. [13]*(Формула Дирихле).*

$$S_n\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}} \bar{f}(t)\, dt, \text{ при } K_n(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}$$

Теорема 3. [11] *Имеет место равенство:*

$$\|S_n\|_{L_2 \to C} = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}}.$$

Теорема 4. [14] Пусть E_n есть наилучшее приближение функции $\bar{f}(x)$.

$$E_n = \inf_{T_m \subset H_n} \|T_m(x) - \bar{f}(x)\|_C.$$

Тогда

$$\|S_n\bar{f} - \bar{f}\|_C \leq (3 + \ln n)E_n \text{ при } n \geq 2.$$

Теорема 5. [13] *Для того чтобы* $\|S_n\bar{f} - \bar{f}\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0$, *при* $n \to \infty, \delta \to 0$, *достаточно чтобы* $\ln n\omega(\frac{\pi}{n+1}) \to 0$ *при* $n \to \infty$

- Метод F_n частных сумм ряда Фейера.

Оператор Фейера имеет вид:

$$F_n\bar{f} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k\bar{f},$$

где $S_k = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{j=1}^{k}(a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ при этом $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\,dt$; $a_j = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\cos jt\,dt$; $b_j = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\sin jt\,dt$.

$F_n\bar{f}$ — частная сумма ряда Фейера.

Теорема 6. [14]*(Интегральное представление сумм Фейера). Справедливо равенство:*

$$F_n\bar{f} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_n(x,t)\bar{f}(t)\,dt,$$

где $K_n(x,t) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{k}{n})\cos k(t-x)]$.

Теорема 7. [14] *Имеет место равенство:*

$$\|F_n\|_{L_2 \to C} = \sqrt{\frac{2n + \frac{1}{n}}{6\pi}}.$$

Некоторые оценки для отклонения сумм Фейера.

Теорема 8. [14] *(Бернштейна) Если* $\bar{f}(x) \in C[-\pi,\pi]$ *и* $\bar{f}(x) \in Lip_M\alpha$, *где* $0 < \alpha < 1$, *то при всех* x

$$|F_n\bar{f}(x) - \bar{f}(x)| < \frac{C_\alpha M}{n^\alpha},$$

где C_α *— постоянная, зависящая только от* α.

Теорема 9. [14] *Если* $\bar{f}(x)$, *оставаясь* 2π-*периодической, пробегает весь класс* $Lip_1 1$ *и*

$$\delta_n(1) = \sup\{\max |F_n\bar{f}(x) - \bar{f}(x)|\},$$

то справедлива асимптотическая формула

$$\delta_n(1) = \frac{2\ln n}{\pi n} + \rho_n \frac{\ln n}{n},$$

где $\rho_n \to 0$, *при* $n \to \infty$.

Во втором разделе приводится:

- Постановка задачи восстановления функции.

Пусть непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, но вместо этой функции известна функция $f_\delta(x)$: $\|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq \delta$. Функция $f_\delta(x)$ называется δ-приближением $f(x)$ в среднеквадратичной метрике.

Требуется по f_δ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$, то есть функции $\tilde{f}_\delta(x)$, для которых

$$\|\tilde{f}_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

- Решение задачи восстановления функции с "периодическими"краевыми условиями.

Справедлива оценка:

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[\pi,\pi]} \leq \|S_n\|_{L2\to C}\delta + \|S_n f - f\|_{C[-\pi,\pi]}. \tag{1}$$

Теорема 10. [13] *Для того чтобы* $\|S_n f_\delta - f\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0$, *при* $n \to \infty, \delta \to 0$, *достаточно чтобы* $n = n(\delta)$ *было такое, что :*

1. $n(\delta) \to \infty$ *при* $\delta \to 0$

2. $\delta\sqrt{n(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Аналогично для $F_n f_\delta$ справедлива оценка:

$$\|F_n f_\delta - f\|_C \leq \|F_n\|_{L_2\to C}\delta + \|F_n f - f\|_C \tag{2}$$

на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Теорема 11. [13] *Для того чтобы* $\|F_n f_\delta - f\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0$, *при* $n \to \infty, \delta \to 0$, *достаточно чтобы* $n = n(\delta)$ *было такое, что :*

1. $n(\delta) \to \infty$ *при* $\delta \to 0$
2. $\delta\sqrt{n(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Таким образом решением задачи восстановления функции с "периодическими"краевыми условиями является функция $(S_{n(\delta)} f_\delta)(x)$, поскольку для нее выполняется сходимость:

$$\|S_{n(\delta)} f_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0 \text{ при } \delta \to 0,$$

для оператора S_n и функция $(F_{n(\delta)} f_\delta)(x)$, поскольку для нее выполняется сходимость:

$$\|F_{n(\delta)} f_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi,\pi]} \to 0 \text{ при } \delta \to 0,$$

для оператора F_n.

- Моделирование функции, заданной с погрешностью.

Для проведения численного эксперимента приведем алгоритм моделирования функции $f_\delta(x)$ по точно заданной $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ и δ некоторое число из интервала $(0, 1)$. Построим функцию $\tilde{f}_\delta(x)$ такую, что:

$$\|\tilde{f}_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq \delta$$

Разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на m частей и рассмотрим узлы $x_i, i = 0, \ldots, m$.

Далее возьмем некоторое $\tilde{\delta}, 0 < \tilde{\delta} < 1$ и определим функцию $f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ при $i = 0, 1, 4, \cdots, m$.

Пусть

$$f_{\tilde{\delta}}(x_i) = f(x_i) + (-1)^i A_i \tilde{\delta},$$

где A_i — случайные числа.

При $i = 2, 3$ будем считать

$$f_{\tilde{\delta}}(x_2) = f(x_2) + N A_2 \tilde{\delta},$$

$$f_{\tilde{\delta}}(x_3) = f(x_3) - N A_2 \tilde{\delta}.$$

Из условия, что m, δ и $\tilde{\delta}$ заданы, можно определить возмущение N:

$$N = \sqrt{\frac{m[(\frac{\delta}{\tilde{\delta}})^2 - 1]}{2} + 1}.$$

- Численный алгоритм восстановления функции.

Отрезок $[-\pi, \pi]$ разобьем на m точек. Для вычисления функции $S_n f_{\tilde{\delta}}$ в узлах x_i используем сингулярный интеграл сумм Фурье, а именно:

$$S_n f_{\tilde{\delta}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \dfrac{(t-x)}{2}} f_{\tilde{\delta}}(t)\, dt.$$

Как сказанно выше, заменяем этот интеграл на конечную сумму, считаем этот интеграл по формуле левых прямоугольников:

$$S_n f_{\tilde{\delta}}(x_i) = h \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t_j - x_i)}{\sin \dfrac{(t_j - x_i)}{2}} f_{\tilde{\delta}}(t_j).$$

Как только t_j совпадает с x_i заменяем ядро на $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2}\tau}{\sin \dfrac{\tau}{2}}$.

Аналогично, заменяем сингулярный интеграл сумм Фейера

$$F_n f_{\tilde{\delta}} = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-x)}{\sin^2 \dfrac{(t-x)}{2}} f_{\tilde{\delta}}(t)\, dt,$$

на сумму по формуле левых прямоугольников:

$$F_n f_{\tilde{\delta}}(x_i) = h \frac{1}{2n\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t_j - x_i)}{\sin^2 \dfrac{(t_j - x_i)}{2}} f_{\tilde{\delta}}(t_j).$$

И как только t_j совпадает с x_i заменяем ядро в сумме на $\lim\limits_{\tau \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{n}{2}\tau}{\sin^2 \dfrac{\tau}{2}}$.

Из теоремы 10 и 11 известно, что параметр n должен удовлетворять условиям $n = n(\delta)$:

1. $n(\delta) \to \infty$, при $\delta \to 0$,
2. $\delta\sqrt{n(\delta)} \to 0$, при $\delta \to 0$.

Тогда параметр $n(\delta)$ будем выбирать следующим образом: $n(\delta) = [\frac{1}{\delta\gamma}]$.

Рассмотрим задачу восстановления функции $f(x) = x^2 - \pi^2$.

В приложении А был проведен численный эксперимент по меделированию функции, заданной с погрешностью. Приведена программа, реализованная на языке C++, для продсчета параметров, необходимых для моделирования функции, заданной с погрешностью. А так же представлены полученные графики.

В результате эксперимента наилучший результат был получен для следующих значений параметров: $\delta = 0.001, \tilde{\delta} = 0.0001$, $m = 25$. С помощью программы, реализованной на языке C++, были полученны значения параметров $N, h, x_i, A_i, f(x_i)$ и $f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ и построен следующий график:

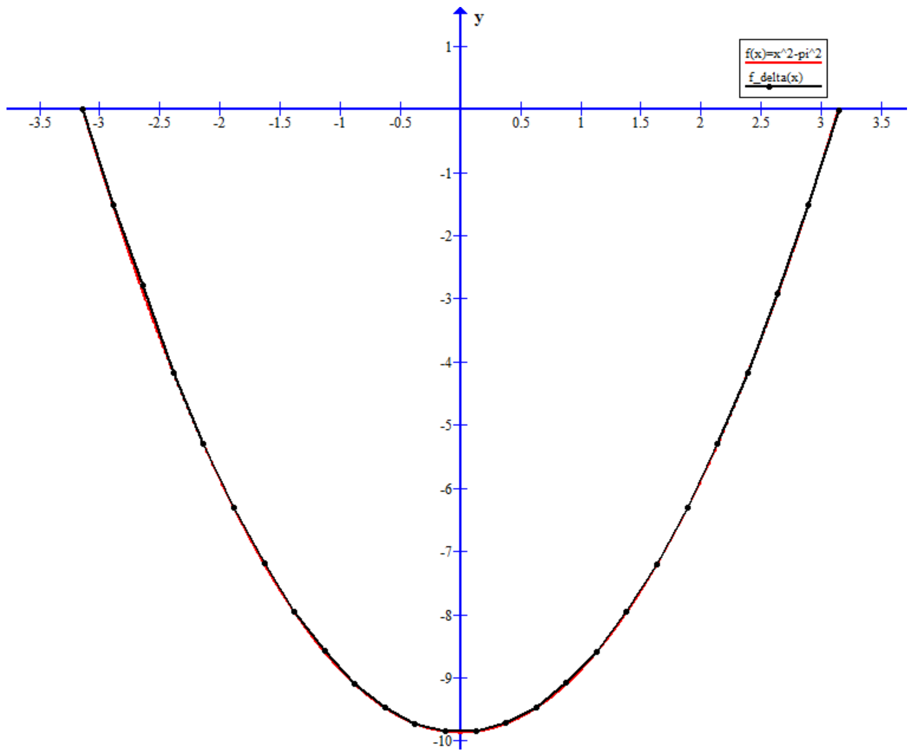

Рисунок 1 — График четвертой модели $f_{\tilde{\delta}}(x)$

В приложении Б был проведен численный эксперимент по восстновлению непрерывной периодической функции, заданной с погрешностью. Приведена программа, реализованная на языке C++, для продсчета параметров, необходимых для построения графиков приближенных функций, полученных с помощью операторов Фурье и Фейра, а так же представлены полученные графики.

В результате эксперимента наилучший результат восстановления периодической функции был получен для следующих значений параметров: $\delta = 0.001, \tilde{\delta} = 0.0001$, $m = 25$, $\gamma = 0.45$. Тогда $h = 0.2512, N = 35.3624$ и $n(\delta) = 22$. С помощью программы, реализованной на языке C++, были полученны значения параметров $x_i, f_{\tilde{\delta}}(x_i), Snf_{\tilde{\delta}}(x_i)$ и $F_n f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ и построен следующий график:

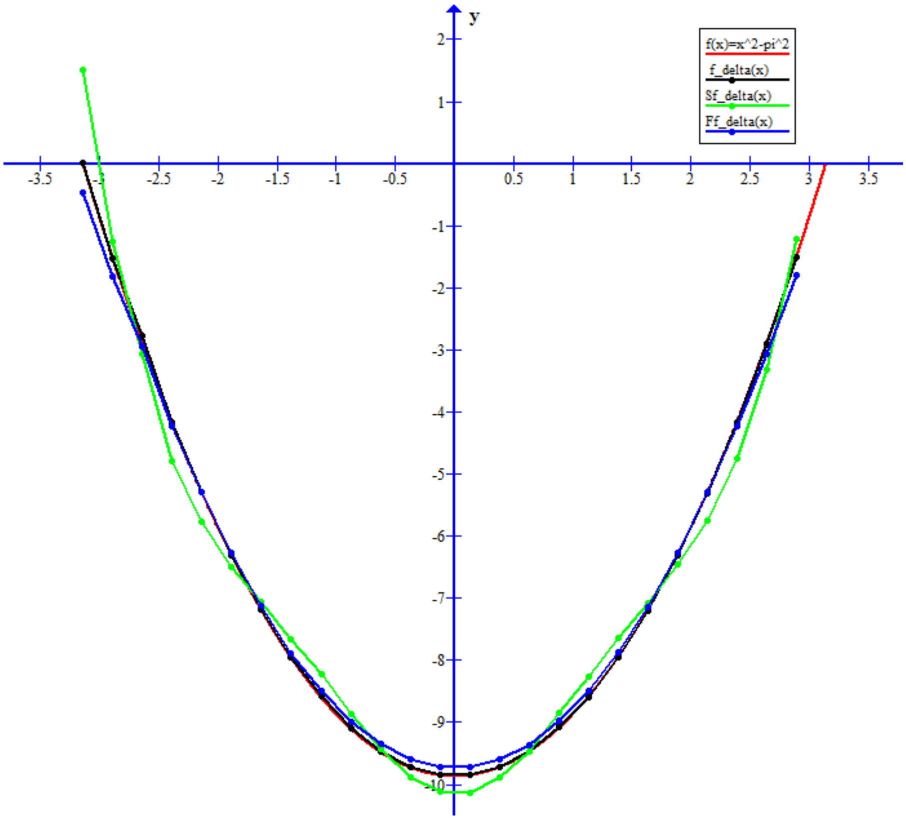

Рисунок 2 — четвертый эксперимент

В теории известно, что для гладких функций оператор S_n приближает периодическую функцию лучше, чем F_n. Но на практике работа происходит не с исходной "хорошей"функцией, а с функцией, заданной с погрешностью, которая уже не является периодической и гладкой. То есть в оценках $\|S_n f - f\|_C \le \|S_n\|_{L_2 \to C}\delta + \|S_n f - f\|_C$ и $\|F_n f - f\|_C \le \|F_n\|_{L_2 \to C}\delta + \|F_n f - f\|_C$ большую роль играет слагаемые $\|S_n\|_{L_2 \to C}\delta$ и $\|F_n\|_{L_2 \to C}\delta$ соответсвенно. И эти слагаемые играют большую роль в практическом применении данных опраторов при восстановлении периодических функций, заданных с погрешностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе рассмотрены задача моделирования функции, заданной с погрешностью и задача восстановления непрерывной периодической функции. Разработан продукт решения данных задач на ЭВМ на высокоуровневом языке программирования C++. Так же были получены нормы операторов Фурье и Фейера $\|S_n\|_{L_2 \to C}$, $\|F_n\|_{L_2 \to C}$ соответственно.

С помощью проведенных экспериментов были обнаружены достоинства и недостатки приведенных методов решения задачи восстановления периодической функции в практическом применении. Были получены условия наилучших результатов в моделировании функции, заданной с погрешностью. С помощью оператора Фейера F_n было полученно лучшее приближение функции, заданной с погрешностью, чем с помощью оператора Фурье S_n. Хотя, из теории приближений известно, что для гладких периодических функций оператор Фурье S_n даёт лучшее приближение, чем оператор Фейера F_n. Но так как задача решается не для исходной гладкой функции, а для смоделированной, которая не является гладкой и периодической, то получили противоположные результаты для данных операторов.

Полученные результаты могут быть применены при решении прикладных задач.