Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Теории функций и приближений

Применение генетического алгоритма для решения задачи выбора оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета

Князевой Марии Алексеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. __________ Л. В. Борисова

Зав. кафедрой
доцент, д.ф.-м.н. __________ С. П. Сидоров

Саратов 2016 год

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В условиях рыночных отношений представляют особый интерес принципиально новые возможности экономического анализа, в котором проблема оценки и учета экономического риска приобретает самостоятельное теоретическое и, главное, прикладное значение как важная часть менеджмента, теории и практики управления.

Рассмотрение вопросов финансовых рисков потребовало привлечения аппарата финансовой математики. В науке о финансах, являющейся лишь частью всей экономики, как в никакой другой, важна оценка действующим лицом (инвестором, участником рынка и т.п.) дохода и риска финансовой операции. Финансовые риски – это спекулятивные риски, для которых возможен как положительный, так и отрицательный результат. Их особенность проведения таких операций, которые по своей природе являются рискованными.

Под портфелем понимается набор инвестиций в ценные бумаги, обращающиеся на финансовом рынке. В 1952 г. Гарри Марковиц опубликовал фундаментальную работу, которая является основой подхода к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля. Подход Марковица начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, который называется периодом владения. В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего-либо использует полученный доход (либо делает то и другое одновременно). Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, это эквивалентно поиску эффективных из набора достижимых портфелей. Поэтому подобную проблему часто называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

Принимая решение, инвестор должен иметь в виду, что доходность ценных бумаг (и, таким образом, доходность портфеля) в предстоящий период владения неизвестна. Однако инвестор может оценить ожидаемую (или среднюю) доходность различных ценных бумаг, основываясь на некоторых предположениях, а затем инвестировать средства в бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Марковиц отмечает, что это будет в общем неразумным решением, так как типичный инвестор хотя и желает, чтобы «доходность была высокой», но одновременно хочет, чтобы «доходность была бы настолько определенной, насколько это возможно». Это означает, что инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность, имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы при принятии решения о покупке. Подход Марковица к принятию решения дает возможность адекватно учесть обе эти цели.

Существует три основных модели формирования оптимального портфеля. К ним относится модель Марковица, модель Тобина и модель Шарпа, которая также известна под названием рыночная модель. Решение для этих моделей может быть получено с помощью методов квадратичного программирования.

Обычно на рынке предлагается огромное количество активов, а на число активов портфеля накладывается ограничение – кардинальность числа активов. Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования. Поскольку для данной задачи трудно найти оптимальное решение, многие исследователи и трейдеры используют эвристики, т.е. неточные методы решения задач в этой области. Один из таких методов – это генетический алгоритм.

Цели и задачи исследования. Цель бакалаврской работы состоит в исследовании проблемы поиска структуры инвестиционного портфеля минимизирующей финансовый риск инвестора при заданной ожидаемой доходности портфеля и использование генетического алгоритма для эффективного решения задачи поиска оптимального инвестиционного портфеля.

Для достижения поставленной в бакалаврской работе цели были поставлены и решены следующие задачи:

- Изучены основные портфельные теории;
- Определены понятия доходности финансовых активов;
- Рассмотрены методы оценки привлекательности инвестированных процессов;
- Проанализирован подход «доходность – риск», помогающий в проблеме выбора инвестиционного портфеля;
- Рассмотрены количественные методы анализа рынка ценных бумаг;
- Определены основные генетические операторы для генетического алгоритма;
- Осуществлена численная реализация теоретических моделей портфельного инвестирования;
- Разработана программа для нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является финансовая деятельность инвестора, пытающегося приумножить собственный капитал. Предметом исследования выступает методология количественного анализа процессов инвестирования и решение задачи средствами ЭВМ.

Методы исследования. В работе применены методы математического анализа, методы количественного анализа финансового риска. Программа написана на языке Java, в качестве среды разработки использовалась IntelliJ IDEA 14.

Теоретическая база исследования. Бакалаврская работа написана при использовании фундаментальной литературы по финансовым инвестициям, монографий и учебно-практических пособий по финансовой математике, классических трудов по основным понятиям и методологиям объектно-ориентированного программирования на языке Java. Библиографический список представлен в конце работы.

Структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, семи разделов, заключения, списка используемых источников и приложений.

В первом разделе даны основные понятия финансового анализа: определение инвестирования, инвестирование в ценные бумаги. Даны основные характеристики ценных бумаг и основные характеристики портфеля ценных бумаг.

Рассматривается портфель из *n* активов. Пусть x_i - доля общих вложений, инвестированных в *i-ю* ценную бумагу. Все доли являются неслучайными величинами, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Доходность портфеля определяется как средневзвешенное значение доходностей ценных бумаг, включенных в портфель. В качестве весов используются доли x_i

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i.$$

С учетом правил вычисления математического ожидания, ожидаемая доходность портфеля равна:

$$\overline{m}_p = E[r_p] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i.$$

Отклонение доходности портфеля от ожидаемого значения запишется в виде следующей формулы:

$$r_p - \overline{m}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i).$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения определяет дисперсию портфеля:

$$V_p = E[(r_p - \overline{m}_p)^2] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - \overline{m}_j)] =$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij},$$

где $V_{ij} = E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)]$ - ковариация доходностей i-го и j-го активов, показывающая линейность связи доходностей ценных бумаг между собой. В случае если $i = j$, то ковариация превращается в дисперсию доходности i-той ценной бумаги.

Второй раздел посвящен моделям оптимального портфельного инвестирования. В этом разделе приведена постановка задачи оптимизации структуры портфелей Г. Марковица, Дж. Тобина и У. Шарпа.

Оптимальную структуру портфеля, полученную из решения задачи Марковица, можно представить и в аналитическом виде:

$$X = V^{-1} \cdot \frac{\overline{m}_p (I \cdot J_{12} - m \cdot J_1) + m \cdot J_{12} - I \cdot J_2}{J_{12}^2 - J_1 J_2},$$

где $J_1 = I^T V I$, $J_2 = m^T V^{-1} m$, $J_{12} = I^T V^{-1} m$,

$V = (V_{ij})$ – ковариационная матрица размерностью $n \times n$;

m – вектор-столбец ожидаемых доходностей размерностью $n \times 1$;

I – единичный вектор-столбец размерностью $n \times 1$;

X – вектор-столбец неизвестных долей размерностью $n \times 1$.

Модель Тобина включает как рисковые, так и безрисковые ценные бумаги. Обозначим через x_0 долю безрисковых вложений с гарантированной доходностью r_0, через $X = (x_1, ..., x_n)^T$ – вектор долей вложений в рисковые активы, тогда задача выбора оптимальной структуры комбинированного портфеля, состоящего из безрискового актива и n рисковых активов, формулируется следующим образом: найти вектор X, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = X^T V X\ ,$$

и удовлетворяет ограничениям

$$m^T X + r_0 x_0 = \overline{m}_p\ ,\quad I^T X + x_0 = 1.$$

$$X = \frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{g^2}(\overline{m}_p - r_0)\,.$$

Модель Шарпа (рыночная модель) предполагает, что с ростом рыночного индекса, вероятно, будет расти и цена акции, а с падением рыночного индекса, соответственно падать.

Линейная регрессионная модель позволяет представить взаимосвязь между доходностями в следующем виде:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j \cdot r_I + \varepsilon_j\ ,$$

где r_j - доходность ценной бумаги jза некоторый период,

r_I - доходность на рыночный индекс за этот же период (определяется, так же как и доходность любой ценной бумаги), α_j - коэффициент смещения,

β_j - коэффициент наклона,

ε_j - случайная погрешность.

В третьем разделе рассматривается задача оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность.

Рассмотрим модели портфельного инвестирования, дополненные ограничениями на кардинальность, т.е. на максимальное количество активов в портфеле.

Подход Марковица стал базовым механизмом для многих систем портфельной аналитики и планирования в построении эффективных границ, которые можно рассматривать как набор оптимальных комбинаций в условиях неопределенности. Решение задачи Марковица предполагает, что портфель может содержать любое количество активов из предложенного набора в сколь угодно малых или больших долях. Однако это не соответствует реальности. Обычно на рынке предлагается огромное количество активов, а на число активов портфеля накладывается ограничение – кардинальность числа активов.

Введение единственного ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования, которая является NP-сложной.

Введем обозначения:

n – общее число доступных активов;

K – необходимое количество активов в выбранном портфеле;

$\overline{m}_i$ – ожидаемая доходность актива i, $i = 1,..., n$;

V_{ij} – ковариация между доходностью активов i и j, $i = 1,..., n$, $j = 1,..., n$;

$\overline{m}_p$ – необходимый уровень ожидаемой доходности;

Переменными модели являются:

x_i – доля от общего объема инвестиций, вложенных в актив i;

δ_i – переменная, показывающая включается ли актив в портфель. Принимает значения: 1, если актив в портфеле, и 0 в противном случае (доля x_i также равна нулю).

Задача выбора оптимальной структуры портфеля с ограничениями на кардинальность формулируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i x_i = \overline{m}_p , \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = K .$$

Для модели Тобина задача выбора портфеля с ограничением на кардинальность формируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \ ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i x_i + r_0 x_0 = \overline{m}_p \,, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i + x_0 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = K \ .$$

В этом портфеле присутствует *K* рисковых активов и один безрисковый.

Для модели Шарпа задача выбора портфеля с ограничением на кардинальность формируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует портфельный риск:

$$V_p = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j \right]^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_{\varepsilon j}^2$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{m}_j = m_p \,, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \delta_j = K$$

Четвертый раздел посвящен генетическому алгоритму. Приводится понятие генетического алгоритма, а также три основных принципа, которые составляют ядро эволюционных вычислений.

Первый принцип основан на концепции выживания сильнейших особей и естественного отбора по Дарвину.

Второй принцип обусловлен тем фактом, что хромосома потомка состоит из частей, полученных из хромосом родителей.

Третий принцип основан на концепции мутации.

В пятом разделе рассматривается генетический алгоритм для решения задачи оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность. Работа генетического алгоритма состоит в выполнении следующих шагов:

1. Кодирование. Используется *двоичное кодирование*. Популяция имеет фиксированный размер $P = s^2$ портфелей, s есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) являются наборы $\delta = (\delta_1,...,\delta_n) \in \Delta_n(K)$, т.е. портфель состоит из n генов, каждый из которых представим битом. Если он равен единице, то актив, соответствующий номеру бита, присутствует в портфеле, в противном случае - отсутствует. В портфеле ровно K рисковых активов.

2. Генерация начальной популяции. Она происходит путем генерации P элементов случайным образом. Для гарантированного решения задачи $P(\delta)$ необходимо, чтобы портфель включал в себя часть активов, имеющих доходность, более высокую, чем $\overline{m}_p$, так и часть активов с доходностью меньшей, чем $\overline{m}_p$.

3. Отбор. Используется *отбор на основе усечения*. Для каждого элемента δ текущей i-ой популяции решается оптимизационная задача $P(\delta)$ и находится соответствующее значение $P_{\min}(\delta)$. Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые $2s$ элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т.е. выбираются $2s \ll P$ элементов текущей i-й популяции с наименьшим значением $P_{\min}(\delta)$. Через A_i обозначается множество особей, полученных в результате отбора на шаге i. После чего с помощью *панмиксии* (случайным образом) отбираются s элементов множества A_i. Полученное множество обозначается через $A_{1,i}$. Множество остальных элементов обозначается через $A_{2,i}$.

4. *Скрещивание*. Используется особый оператор скрещивания, при котором каждой паре элементов (ε, δ), $\varepsilon \in A_{1,i}$, $\delta \in A_{2,i}$, ставится в соответствие элемент (потомок) γ по следующим правилам:

- ✓ если $\varepsilon_j = 1$ и $\delta_j = 1$, то $\gamma_j = 1$, $(1 \le j \le n)$. То есть, если актив присутствует в обоих родительских портфелях, то он присутствует и в потомке;
- ✓ если $\varepsilon_j = 0$ и $\delta_j = 0$, то $\gamma_j = 0$, $(1 \le j \le n)$. То есть, если актив отсутствует в обоих родительских портфелях, то он отсутствует и в потомке;
- ✓ если $\varepsilon_j + \delta_j = 1$, $(1 \le j \le n)$, т.е актив присутствует только в одном из родительских портфелей, то его присутствие или отсутствие в потомке будет решено на основе случайного выбора так, чтобы $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = K$.

5. *Мутация*. Данный оператор является стандартным для генетического алгоритма и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью. В данном генетическом алгоритме потомок подвергается мутации с вероятностью α посредством случайного выбора одного актива в портфеле-потомке и замены его случайным активом, не представленным в портфеле-потомке, а также в родительских портфелях.

Шестой и седьмой разделы включают в себя практическую часть. В практической части представлено описание разработанной программы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За время работы над бакалаврской работой были изучены модели формирования оптимального портфеля ценных бумаг, а именно модель Марковица, модель Тобина и модель Шарпа. Указанные модели были программно реализованы и использовались для решения задачи нахождения оптимальной комбинации активов в портфеле. В работе также была рассмотрена задача выбора оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов. Решение этой задачи потребовало изучения генетического алгоритма.

В бакалаврской работе был описан ряд вычислительных экспериментов. В результате экспериментов можно сделать вывод, что все три модели портфельного инвестирования дают примерно одинаковый результат. Исключение составляет модель Тобина, которая предполагает включение в портфель безрискового актива. Из-за этого начальная часть эффективной портфельной границы не совпадает с границами моделей Марковица и Шарпа, поэтому для получения наименее рискованного портфеля сравнительно небольшой доходности целесообразно использовать модель Тобина. Однако объем вычислений для модели Шарпа меньше объема вычислений для модели Марковица и Тобина, кроме того эта модель учитывает влияние рынка на доходность активов. Поэтому на практике модель Шарпа или рыночная модель более предпочтительна.

С помощью эксперимента был наглядно продемонстрирован эффект диверсификации. Суть данного эффекта заключается в уменьшении собственного риска портфеля ценных бумаг, путем добавления в него определенных активов. Для этого строилась эффективная портфельная граница, после чего изменялось количество ценных бумаг в портфеле, а потом построение повторялось. Эксперимент проводился как над случайными наборами активов, так и над теми наборами, которые формировались генетическим алгоритмом.