Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и приближений

Анализ эффективности стратегии Каги

при случайном блуждании цены актива

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета

Сысуевой Светланы Дмитриевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. __________________ Н.Ю. Агафонова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент __________________ С. П. Сидоров

Саратов 2016

Введение Бакалаврская работа посвящена изучению влияния применения стратегии Каги на рынке ценных бумаг при условии, что поведение цены актива описывается процессом случайного блуждания на прямой. *Актуальность* этой темы обусловлена необходимостью разработки и усовершенствования теорий и практических методов, позволяющих участникам рынка анализировать поведение цен и принимать для себя наиболее эффективные решения.

Для максимизации прибыли инвестор может использовать различные стратегии и методы, которые рассматриваются в техническом анализе. Одним из таких методов является стратегия Каги, основанная на извлечении выгоды из значительных колебаний цен. Впервые в литературе подробное описание стратегии Каги появилось в книге Н. Нисона, дальнейшая математическая формализация, изучение вероятностных характеристик и анализ применения стратегии Каги к различным моделям поведения цены актива были проведены в работах Пастухова С. В. и Спиряева М. А.

Опираясь на уже имеющуюся теоретическую базу по построению стратегии Каги, автором рассматриваемой здесь бакалаврской работы была исследована эффективность применения стратегии Каги к модели случайного блуждания поведения цен. Основные черты общих случайных блужданий можно охарактеризовать на примере простейшего случайного блуждания, порождаемого схемой испытаний Бернулли. Несмотря на простоту процесса модель случайного блуждания играет важную роль для понимания динамики цен на бирже, позволяя учитывать некоторые особенности поведения инвесторов на рынке.

Цель выполняемой бакалаврской работы – оценить эффективность применения стратегии Каги к модели случайного блуждания.

Основные задачи:

а) Изучить теоретический материал по процессу случайного блуждания и его приложениям.

б) Изучить теорию, связанную со стратегией Каги и её применением в техническом анализе.

в) Выполнить моделирование процесса случайного блуждания.

г) Сравнить полученные практические результаты с теоретическими расчётами.

д) Написать программу, моделирующую применение стратегии Каги к деятельности инвестора на рынке ценных бумаг.

е) Оценить результаты для разных параметров, сравнить их с результатами для безарбитражного случая, оценить степень эффективности стратегии.

Работа состоит из четырёх разделов. В разделе 1 «Случайное блуждание: характеристики процесса, задача о разорении игрока» излагается основная теория, касающаяся случайного блуждания. В подразделе 1.1 проводится обзор основных необходимых понятий из теории вероятностей, вводятся величины, связанные со случайным блужданием, формулируется постановка задачи, выводятся формулы для вероятностей достижения точкой границ интервала $[A, B]$. В подразделе 1.2 приводятся следствия из полученных формул для частных случаев случайного блуждания. В следующем подразделе 1.3 изучается вопрос о сходимости $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ к предельным значениям $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. В последнем подразделе 1.4 данного раздела получены формулы для вычисления средней длительности случайного блуждания.

В разделе 2 «Моделирование случайного блуждания» описывается моделирование процесс случайного блуждания на прямой. Вычисленные в программе эмпирические характеристики процесса сравниваются со значениями теоретических характеристик при различных параметрах процесса, делаются выводы об их влиянии на точность приближения.

В разделе 3 «Описание стратегии Каги» изучается теория построения стратегии Каги и рассматривается её интерпретация с практической точки зрения.

В разделе 4 «Моделирование стратегии Каги» выполняется моделирование рассматриваемой стратегии, оцениваются результаты её применения, а также проводится сравнение полученной выгоды или потери со случаем, когда инвестор не проводит никаких действий с активом, кроме покупки в начальный момент и продажи в конце временного интервала.

Основное содержание работы Рассмотрим схему Бернулли (Ω, F, P), где $\Omega = \{\omega : \omega = (x_1, \ldots, x_n),$
$x_i = \pm 1\}$ - множество элементарных событий ω, F - система всех подмножеств Ω; $p(\omega) = p^{\nu(\omega)} q^{n-\nu(\omega)}$ - вероятность события ω, где p - вероятность успеха, q - вероятность неуспеха, $\nu(\omega) = \frac{\sum x_i + n}{2}$ - количество успехов, $n - \nu(\omega)$ - количество неуспехов. Пусть $\xi_i(\omega) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда последовательность $\xi_1, \ldots, \xi_n$ является последовательностью независимых бернуллиевских случайных величин

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = -1) = q, \quad p + q = 1.$$

Пусть $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, $1 \leq k \leq n$. Последовательность $S_0, \ldots, S_n$ можно рассматривать как траекторию случайного блуждания некоторой частицы, выходящей из нуля. При этом $S_{k+1} = S_k + \xi_k$, т. е. если в момент k частица находится в точке S_k, то в момент $k+1$ она сдвигается либо на единицу вверх (с вероятностью p), либо на единицу вниз (с вероятностью q).

Пусть A и B — два целых числа, $A \leq 0 \leq B$. Нас интересует, с какой вероятностью блуждающая частица выйдет за n шагов из интервала (A, B) и с какой вероятностью выход из интервала (A, B) произойдет в точке A или B.

Пусть имеются два игрока (первый и второй), у которых начальные капиталы равны соответственно $(-A)$ и B. Если $\xi_i = +1$, то будем считать, что второй игрок платит единицу капитала первому; если же $\xi_i = -1$, то наоборот, первый платит второму. Таким образом, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ можно интерпретировать как величину выигрыша первого игрока у второго (если $S_k < 0$, то этот выигрыш есть на самом деле величина проигрыша первого игрока второму) за k «ходов».

В тот момент времени $k \leq n$, когда впервые $S_k = B \quad (S_k = A)$, капитал второго (первого) игрока становится равным нулю, т. е., происходит его разорение.

Введем следующий ряд обозначений. Пусть x — целое число из интервала $[A, B]$ и для $0 \leq k \leq n$ пусть $S_k^x = x + S_k$ - координата частицы в момент k, вышедшей из точки x в нулевой момент.

Далее обозначим:

$$\tau_k{}^x = min\{0 \le l \le n : S_l^x = A \text{ или } B\}, \tag{1}$$

где $\tau_k^x = k$, если $A < S_l{}^x < B$ для всех $0 \le l \le k$.

Для каждого $0 \le k \le n$ и $x \in [A, B]$ момент $\tau_k{}^x$, называемый моментом остановки, является целочисленной случайной величиной, определенной на пространстве элементарных событий Ω.

Для всех $l < k$ множество $\{\omega : \tau_k{}^x = l\}$ есть событие, состоящее в том, что случайное блуждание $\{S_i{}^x, \quad 0 \le i \le k\}$, начинающееся в нулевой момент в точке x, выйдет из интервала (A, B) в момент l. Для $l \le k$ множества $\{\omega : \tau_k{}^x = l, S_i{}^x = A\}$ и $\{\omega : \tau_k{}^x = l, S_i{}^x = B\}$ имеют смысл событий, состоящих в том, что блуждающая частица выйдет из интервала (A, B) в момент l в точках A и B соответственно.

Обозначим для всех $0 \le k \le n$

$$F_k{}^x = \sum_{0 \le l \le k} \{\omega : \tau_k{}^x = l, S_l{}^x = A\}$$

- событие, состоящее в том, что частица выйдет из интервала (A, B) в точке A за время $[0, k]$;

$$G_k{}^x = \sum_{0 \le l \le k} \{\omega : \tau_k{}^x = l, S_l{}^x = B\} \tag{2}$$

- событие, состоящее в том, что частица выйдет из интервала (A, B) в точке B за время $[0, k]$;

и пусть

$$\alpha_k(x) = P(F_k{}^x), \quad \beta_k(x) = P(G_k{}^x)$$

— вероятности выхода частицы за время $[0, k]$ из интервала (A, B) соответственно в точках A и B.

Для указанных нами вероятностей получены рекуррентные соотношения, из которых последовательно находятся $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ и $\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x)$.

$$\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x+1) + q\beta_{k-1}(x-1), \tag{3}$$

где

$$\beta_l(B) = 1, \quad \beta_l(A) = 0, \quad 0 \le l \le n. \tag{4}$$

Аналогично

$$\alpha_k(x) = p\alpha_{k-1}(x+1) + q\alpha_{k-1}(x-1), \tag{5}$$

$$\alpha_l(A) = 1, \quad \alpha_l(B) = 0, \quad 0 \le l \le n. \tag{6}$$

Решая эти уравнения, получим:

$$\beta(x) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^A}{\left(\frac{q}{p}\right)^B - \left(\frac{q}{p}\right)^A}. \tag{7}$$

$$\alpha(x) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^B - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^B - \left(\frac{q}{p}\right)^A}. \tag{8}$$

Если же $p = q = \frac{1}{2}$, то единственными решениями $\beta(x)$ и $\alpha(x)$ задач 3, 4 и 5, 6 являются соответственно

$$\beta(x) = \frac{x - A}{B - A}, \tag{9}$$

$$\alpha(x) = \frac{B - x}{B - A}. \tag{10}$$

Величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будем называть вероятностями разорения первого и второго игрока соответственно.

Далее рассматриваются несколько частных случаев данной задачи и следствий, полученных из них.

Также изучается вопрос о сходимости вероятностей $\alpha_k(x)$ к $\alpha(x)$ и вероятностей $\beta_k(x)$ к $\beta(x)$ и получены оценки для их разностей.

Рассмотрим вопрос о средней длительности случайного блуждания. Пусть $m_k(x) = M{\tau_k}^x$ — математическое ожидание момента остановки ${\tau_k}^x$, $k \le n$.

Показано, что существует предел

$$m(x) = \lim_{n\to\infty} m_n(x),$$

и для него справедлива формула при $p \neq q$:

$$m(x) = \frac{1}{p-q}(B\beta(x) + A\alpha(x) - x), \tag{11}$$

При $p = q = \frac{1}{2}$:

$$m(x) = (x - B)(x - A). \tag{12}$$

Во втором разделе работы проведено моделирование процесса случайного блуждания. Программа проводит заданное количество n реализаций случайного блуждания с параметрами:

- A – нижняя граница интервала, выход за пределы которого означает остановку
- B – верхняя граница соответствующего интервала
- x_0 – координата начальной точки процесса
- k – время, в течение которого ожидается момент остановки
- N – общее время процесса
- p – вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, равное 1
- q - вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, равное -1

Проведя n реализаций данного процесса, вычисляем частоту остановок в точке A и в точке B, а также среднее арифметическое моментов остановки. Затем они сравниваются с теоретическими характеристиками – вероятностями остановки блуждания в точках A и B и математическим ожиданием момента остановки, полученными в первой главе. По результатам моделирования выяснено, что изменение параметров A, B, x_0 практически не влияет на точность приближения теоретических характеристик практическими.

Рассмотрев, как влияет значение времени наблюдения k на точность приближения, мы можем сказать, что при изменении значения этого параметра в меньшую сторону, отклонение практических характеристик от теоретических значительно увеличивается. Объяснить это можно тем, что если наблюдать за величиной в течение короткого временного промежутка, точка может не достичь за этот промежуток точек A или B, и сделает она это в оставшийся интервал $[k, N]$. Соответственно, значение данных моментов остановки учтено не будет и характеристики будут отклоняться от теоретически вычисленных значений. При увеличении параметра k точность характеристик увеличивается.

Зависимость точности от параметра n вполне очевидна. Согласно теореме Бернулли, при многократном повторении случайного эксперимента с двумя исходами относительная частота успехов приближается к вероятности успеха в одном испытании. Поэтому чем больше реализаций мы проводим, тем с большей точностью мы приближаем вероятности $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Зависимость разницы между средним арифметическим моментов остановки и математическим ожиданием момента остановки аналогична и объясняется состоятельностью оценки.

В третьем разделе работы рассматривается построение Каги H-стратегии. Дается краткий обзор материала по данной теме, вводятся необходимые понятия. В первой части раздела приводится алгоритм построения последовательности моментов времени $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0,\dots,N}$ для произвольной непрерывной функции F на отрезке $[0, T]$. Построение проводится по индукции в предположении, что выполняется условие:

$$\sup_{[0,T]} F - \inf_{[0,T]} F \geq H.$$

На n-ном шаге имеем:

- $F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = H$, тогда положим:

$$\tau_{n+1} = \inf\{u \in [\tau_n, T] : \max_{[\tau_n, u]} F - F(u) = H\}, \tag{13}$$

$$\tau_{n+1}^* = \inf\{u \in [\tau_n, \tau_{n+1}] : F(u) = \max_{[\tau_n, \tau_{n+1}]} F\};$$

- $F(\tau_n) - F(\tau_n^*) = -H$, тогда положим:

$$\tau_{n+1} = \inf\{u \in [\tau_n, T] : F(u) - \min_{[\tau_n,u]} F = H\}, \tag{14}$$

$$\tau_{n+1}^* = \inf\{u \in [\tau_n, \tau_{n+1}] : F(u) = \min_{[\tau_n,\tau_{n+1}]} F\}.$$

Во второй части раздела рассматривается интерпретация данного построения с экономической точки зрения на примере деятельности инвестора на рынке ценных бумаг. Приведем формулировку задачи и основные принципы.

Пусть имеется некоторый актив, траектория движения цены которого является непрерывным процессом, то есть функцией $F(t)$, зависящей от времени. Инвестор, имеющий начальный капитал $u(0)$ приобретает данный актив в начале срока ($t = 0$), и обязательно продаёт в конце ($t = T$), и кроме того имеет возможность продавать и покупать актив в течение всего этого срока $[0, T]$.

Выберем параметр H - не слишком маленьким и не слишком большим. По указанному выше алгоритму построим последовательность моментов времени $(\tau_n^*, \tau_n)_{n=0,\dots,N}$ для функции $F(t)$.

Инвестор в течение всего срока следит за движением цены актива и в моменты, определяемые формулой (13), продает актив, а в моменты, определяемые формулой (14), покупает актив. Для первых и последних элементов последовательности приводятся отдельные формулы, которые являются модификациями аналогичных формул из построения с учетом смысла и условий рассматриваемой задачи.

Выгода, полученная от применения стратегии Каги, может быть рассчитана следующим образом:

$$u(T) - u(0) = \sum_{k=0}^{N-1} (F(\tau_{k+1}) - F(\tau_k)).$$

Завершающей частью работы является моделирование стратегии Каги, применяемой к модели случайного блуждания. В качестве исходных данных программе задаются количество реализаций стратегии, начальная цена актива, начальный капитал инвестора, временной интервал, в течение которого тот продаёт и покупает актив, параметр Н из стратегии Каги и вероятность p из процесса случайного блуждания. На выходе программа выдаёт значения выгоды (потери) от применения стратегии в каждой реализации, значение средней выгоды по все проведенным реализациям и средней выгоды по тому же числу реализаций, в которых инвестор не предпринимает никаких действий в течение временного интервала, кроме покупки актива в начальный момент и его продажи в конце.

Было получено, что при значении $p = 0.5$ выгода как в случае применения стратегии, так и без неё, одинакова и равна нулю. При $p > 0.5$ средняя выгода в обоих случаях положительна, но во втором случае инвестор в среднем выигрывает больше. При $p < 0.5$ средняя выгода в обоих случаях отрицательна, то есть инвестор теряет какую-то часть средств, однако выяснено, что при применении стратегии Каги у инвестора есть шанс сократить потери. Кроме того установлена связь между изменением параметра N и разницей в полученной выгоде (понесенных потерях) в рассматриваемых случаях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ финансового рынка и арбитражных возможностей на нём играет большую роль в современной науке и экономике. Имеющаяся концепция эффективного рынка, основывающаяся на безарбитражности рынка, хотя и не полностью и не совсем точно описывает ситуацию на рынке ценных бумаг, все же может быть применена к реальности, причем вполне успешно. Как показали результаты, полученные в данной работе, даже при условии, что движение цены описывается моделью случайного блуждания - довольно простым процессом, не учитывающем ситуацию в прошлом и не дающем никаких арбитражных возможностей, мы можем использовать стратегию, позволяющие инвестору регулировать свой доход при вложении денег в актив. Такой стратегией явилась стратегия Каги, построенная изначально в предположении, что на рынке имеются арбитражные возможности.

В рассматриваемой здесь работе изучен теоретический материал по процессу случайного блуждания и выполнено моделирование данного процесса. На основе этой модели и теоретической базы по построению стратегии Каги было проведено моделирование применения указанной стратегии. В работе установлено, что использование данной стратегии при условии, что известна информация о тенденции падения цены актива, позволяет инвестору, вложившему свои деньги в этот актив, значительно сократить свои потери по сравнению со случаем, когда инвестор не предпринимает никаких действий. Такие выводы могут оказаться полезными в некоторых случаях при применении на практике и повысить эффективность совершения сделок на финансовом рынке.