Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и приближений

Кусочно-линейная аппроксимация и численный анализ некоторых динамических моделей экономики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математический факультет
Василюка Василия Васильевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. ____________________ П. А. Терёхин
дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
доцент, д.ф.-м.н. ____________________ С. П. Сидоров
дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

Введение. Работа посвящена изучению модели Кейнса, описывающей поведение государственного бюджета за небольшие временные промежутки, а также построению численного решения модели используя метод решения однородных дифференциальных уравнений первого порядка по системе Хаара. Применение метода Хаара обосновано тем что модель Кейнса может быть представлена в виде ОДУ первого порядка. Также в работе будет проведён анализ полученных в процессе моделирования результатов и их обоснование.

Актуальность темы. Задача качественного и численного анализа решений дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании различных экономических процессов, является популярной областью исследований и важна как с теоретической, так и практической точек зрения. В ряде случаев для такого анализа оказывается достаточно весьма развитых общих методов качественной теории дифференциальных уравнений. Однако, в подавляющем большинстве практических вычислительных задач информация о качественном поведении решений не дает возможность произвести исчерпывающий анализ количественных характеристик решения. Возникает необходимость в использовании численных методов нахождения приближенных решений дифференциальных уравнений, описывающих динамические модели экономики. Современная вычислительная математика предлагает широкий выбор методов и численных алгоритмов нахождения таких приближенных решений, как правило, дополняемых теоретическими результатами об оценке уклонения приближенного решения от точного решения задачи. Важный и широко применяемый на практике классический метод решения дифференциальных уравнений основан на сплайн-аппроксимации искомого решения. В последние десятилетия метод сплайн-аппроксимации интенсивно развивался. В частности, рассматривались различные модификации этого метода. В ряде работ был предложен новый метод численного решения задачи Коши и краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка, а также некоторых вариационных задач. Именно, метод основан на аппроксимации решения задачи посредством кусочно-постоянной функции с узлами в двоично-рациональных точках единичного отрезка, то есть посредством полинома по системе функций Хаара. При этом возникает необходимость в замене оператора дифференцирования другим оператором, заданным на пространстве кусочно-постоянных функций. Данное обстоятельство, по-видимому, является основной причиной отсутствия в этих работах каких-либо теоретических результатов об оценке погрешности приближенных решений. Возможно, что при данном подходе такие оценки погрешности не могут быть получены в принципе. Нами был предложен существенно отличный от описанного и в некотором смысле прямо противоположный ему подход, основная идея которого состоит в следующем. В отличие от классических численных методов предлагается аппроксимировать не само решение, а его старшую производную, причем само решение восстанавливается интегрированием. Весьма важно, что при численной реализации такого подхода мы имеем дело исключительно с конечными алгоритмами нахождения приближенных решений и при теоретическом обосновании сходимости последовательности приближенных решений к точному решению задачи получаются оценки уклонения в явном виде. Данные обстоятельства делают указанный подход весьма перспективным инструментом численного анализа динамических моделей самого разного типа. В данной дипломной работе мы применяем этот подход к анализу динамической модели Кейнса.

Полученные результаты, их научная новизна. На основе нового метода численного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка с использованием функций Хаара построен алгоритм нахождения приближенного решения задачи Коши. Приведены оценки уклонения построенного приближенного решения от точного решения задачи. Осуществлена программная реализация алгоритма. Для дифференциального уравнения, описывающего динамическую модель Кейнса, проведен анализ численных характеристик приближенного решения.

Содержание работы. Работа состоит из Введения, Разделов 1 – 5 и Заключения. Проведен анализ и классификация динамических моделей экономических процессов. Именно, в процессе исследования объекта часто бывает нецелесообразно или даже невозможно иметь дело непосредственно с этим объектом. Удобнее бывает заменить его другим объектом, подобным данному в тех аспектах, которые важны в данном исследовании. В общем виде модель можно определить, как условный образ реального объекта (процессов), который создается для более глубокого изучения действительности. Метод исследования, базирующийся на разработке и использовании моделей, называется моделированием. Необходимость моделирования обусловлена сложностью, а порой и невозможностью прямого изучения реального объекта (процессов). Значительно доступнее создавать и изучать прообразы реальных объектов (процессов), т.е. модели. Можно сказать, что теоретическое знание о чем-либо, как правило, представляет собой совокупность различных моделей. Эти модели отражают существенные свойства реального объекта (процессов), хотя на самом деле действительность значительно содержательнее и богаче.

Модель – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте.

На сегодняшний день общепризнанной единой классификации моделей не существует. Однако из множества моделей можно выделить словесные, графические, физические, экономико-математические и некоторые другие типы моделей.

Экономико-математические модели – это модели экономических объектов или процессов, при описании которых используются математические средства. Цели их создания разнообразны: они строятся для анализа тех или иных предпосылок и положений экономической теории, логического обоснования экономических закономерностей, обработки и приведения в систему эмпирических данных. В практическом плане экономико-математические модели используются как инструмент прогноза, планирования, управления и совершенствования различных сторон экономической деятельности общества. Экономико-математические модели отражают наиболее существенные свойства реального объекта или процесса с помощью системы уравнений. Единой классификации экономико-математических моделей не существует, хотя можно выделить наиболее значимые их группы в зависимости от признака классификации.

По целевому назначению модели делятся на:

- Теоретико-аналитические (используются в исследовании общих свойств и закономерностей экономических процессов);
- Прикладные (применяются в решении конкретных экономических задач, таких как задачи экономического анализа, прогнозирования, управления).

По учету фактора времени модели подразделяются на:

- Динамические (описывают экономическую систему в развитии);
- Статистические (экономическая система описана в статистике, применительно к одному определенному моменту времени; это как бы снимок, срез, фрагмент динамической системы в какой-то момент времени).

По длительности рассматриваемого периода времени различают модели:

- Краткосрочного прогнозирования или планирования (до года);
- Среднесрочного прогнозирования или планирования (до 5 лет);
- Долгосрочного прогнозирования или планирования (более 5 лет).

По цели создания и применения различают модели:

- Балансовые;
- Эконометрические;
- Оптимизационные;
- Сетевые;
- Систем массового обслуживания;
- Имитационные (экспертные).

В *балансовых* моделях отражается требование соответствия наличия ресурсов и их использования.

Параметры *эконометрических* моделей оцениваются с помощью методов математической статистики. Наиболее распространены модели, представляющие собой системы регрессионных уравнений. В данных уравнениях отражается зависимость эндогенных (зависимых) переменных от экзогенных (независимых) переменных. Данная зависимость в основном выражается через тренд (длительную тенденцию) основных показателей моделируемой экономической системы. Эконометрические модели используются для анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов с использованием реальной статистической информации.

Оптимизационные – модели позволяют найти из множества возможных (альтернативных) вариантов наилучший вариант производства, распределения или потребления. Ограниченные ресурсы при этом будут использованы наилучшим образом для достижения поставленной цели.

Сетевые – модели наиболее широко используются в управлении проектами. Сетевая модель отображает комплекс работ (операций) и событий, и их взаимосвязь во времени. Обычно сетевая модель предназначена для выполнения работ в такой последовательности, чтобы сроки выполнения проекта были минимальными. В этом случае ставится задача нахождения критического пути. Однако существуют и такие сетевые модели, которые ориентированы не на критерий времени, а, например, на минимизацию стоимости работ. Модели систем массового обслуживания создаются для минимизации затрат времени на ожидание в очереди и времени простоев каналов обслуживания. Имитационная модель, наряду с машинными решениями, содержит блоки, где решения принимаются человеком (экспертом). Вместо непосредственного участия человека в принятии решений может выступать база знаний. В этом случае персональный компьютер, специализированное программное обеспечение, база данных и база знаний образуют экспертную систему. Экспертная система предназначена для решения одной или ряда задач методом имитации действий человека, эксперта в данной области.

По учету фактора неопределенности модели подразделяются на:

- Детерминированные (с однозначно определенными результатами);
- Стохастические (вероятностные; с различными, вероятностными результатами).

По типу математического аппарата различают модели:

- Линейного программирования (оптимальный план достигается в крайней точке области изменения переменных величин системы ограничений);
- Нелинейного программирования (оптимальных значений целевой функции может быть несколько);
- Корреляционно-регрессионные;
- Матричные;
- Сетевые;
- Теории игр;
- Теории массового обслуживания и т.д.

С развитием экономико-математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей и новых признаков их классификации, осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции.

Динамическая модель Кейнса. Рассмотрим упрощённую балансовую модель, включающую в себя главные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть Y(t), E(t), S(t), I(t) — соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Эти величины рассматриваются как функции от времени t. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $a(t)$ — коэффициент склонности к потреблению ($0 < \mathrm{a}(t) < 1$), $b(t)$ — автономное (конечное) потребление, $k(t)$ — норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (1), положительны.

Поясним смысл уравнений (1). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу — этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего и конечного потребления — эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход.

Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $E(t)$ заданы — они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Необходимо найти динамику национального дохода, или Y как функцию от времени t. Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравнения и для $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных слагаемых получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y' = \frac{1 - a(t)}{k(t)} Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}. \qquad (2)$$

Существует достаточно сложная формула общего решения этого уравнения. Мы проанализируем более простой случай, полагая основные параметры задачи а, b и k постоянными числами. Тогда уравнение (2) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y' = \frac{1 - a}{k} Y - \frac{b + E}{k}. \qquad (3)$$

В качестве частного решения уравнения (3) возьмем так называемое равновесное решение, когда $Y' = 0$, т. е.

$$Y_p = \frac{b + E}{1 - a}. \qquad (4)$$

Можно заметить, что эта величина положительна, а общее решение однородного уравнения дается формулой:

$$\tilde{y} = Cexp\left(\frac{1 - a}{k} t\right),$$

так что общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}.$$

Численное прогнозирование по модели Кейнса. Первоначально возьмём задачу Коши (5) для линейного дифференциального уравнения первого порядка для выведения основных формул решения ОДУ методом Хаара:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ \quad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{5}$$

Для подсчёта y' будем использовать приближение следующего вида:

$$y' = \sum_{k=0}^{2^n-1} C_k \, \chi_{\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right)}, \tag{6}$$

где соответствующие $\{C_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ – выбираются так чтобы уравнение (5) выполнялось в каких-нибудь точка $\chi_{n,k} \epsilon \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ $\left(\text{например } X_{n,k} = \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right)$ т.е.

$$y_n'(\chi_{n,k}) + a(\chi_{n,k})y_n(\chi_{n,k}) = b(\chi_{n,k}), 0 \le k \le 2^{n-1}; \tag{7}$$

обозначим за $a_{n,k} = a(\chi_{n,k})$, $b_{n,k} = b(\chi_{n,k})$;

$$y_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + \frac{1}{2^{n+1}} y_{n,k}\right) = b_{n,k}, \tag{8}$$

(8) – система 2^n уравнений с 2^n неизвестных, $\{C_k\}_{k=0}^{2^n-1}$;

(8) – рекуррентные соотношение $C_k = L(C_1, \dots, C_{k-1})$;

Решение уравнение получим (5) получим по формуле:

$$y_n(x) = y_n(0) + \int_0^x y_n'(t)\, dt, \tag{9}$$

Решение $y_n(x)$ сходится к точному $y(x)$: $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$;

Используя полученные формулы (6), (7), (8), (9) и уравнение (3) выведем и переобозначим формулы решения задачи. Рассмотрим упрощение уравнения (8):

$$z_{n,k} + a_{n,k}\left(y_0 + \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right) = b_{n,k}, \tag{10}$$

(10) – рекуррентные соотношения для всех n, а функции $a_{n,k} = (\frac{1-a(x_{n,k})}{k(x_{n,k})})$, $b_{n,k} = \frac{E(x_{n,k})+b(x_{n,k})}{k(x_{n,k})}$;

В результате получили формулы для численного решения модели:

$$z_{n,k} = b_{n,k} - a_{n,k}\left(y_0 + \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{k-1} z_{n,j}\right),$$

$$z_n'(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} z_{n,k}\chi_{\left(\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}\right)}(x),$$

$$z_n(x) = z_n(0) + \int_0^x z_n'(t)\,dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x).$$

Заключение. В ходе написания работы были рассмотрены различные экономические модели и виды моделирования, в частности была рассмотрена модель Кейнса, описывающая изменение государственного бюджета в течение сравнительно небольших временных интервалов. Были также рассмотрены ортогональные ряды по системе Хаара, на базе этой системы был построен метод решения задачи Коши для однородного дифференциального уравнения с помощью численных методов. Этот метод был применён для получения решений динамической модели Кейнса в форме ОДУ, и получены формулы для реализации процесса численного моделирования динамики изменения государственного бюджета в зависимости от разных значений входных параметров модели.