Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Теории функций и приближений

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ ГОМОРИ В ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы
направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета
Копнина Игоря Андреевича

Научный руководитель
Профессор, д.ф.-м.н ____________ А.Л. Лукашов
подпись, дата

Зав. кафедрой
Доцент, д.ф.-м.н. ____________ С.П. Сидоров
подпись, дата

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Линейное программирование как самостоятельная математическая дисциплина появилась как средство решения экономических задач оптимизации производственных процессов. При этом ,зачастую, компоненты решения должны выражаться в целых числах, т.е быть целочисленными. Например, задачи, в которых количество единиц неделимой продукции, число станков при разгрузке оборудования и т.д.

На ряду с линейным программированием задачи оптимизации, возникающие в экономических приложениях приводят во многих случаях к необходимости рассматривать нелинейное (например квадратичное) программирование. Среди методов решения задач нелинейного программирования можно выделить приближенные методы, в которых нелинейные ограничения и целевая функция заменяются линейными функциями относительно вспомогательных переменных. Полученная задача решается методами линейного программирования и ее решение аппроксимирует решение исходной задачи.

Классическая транспортная задача и некоторые другие задачи транспортного типа обеспечивают решение задачи в целых числах, однако в общем случае условие целочисленности, добавляемое к обычным задачам линейного программирования, усложняет их решение.

Для решения задач линейного целочисленного программирования используется ряд методов. В случае если компоненты оптимального решения оказываются нецелочисленными, их округляют до ближайших целых чисел, при условии что отдельная единица совокупности составляет малую часть всей совокупности. В противном случае округление может привести к неоптимальному целочисленному решению. Тогда используют методы целочисленной оптимизации, они делятся на три основные группы:

а) методы отсечения;

б) комбинаторные методы;

в) приближенные методы.

Целью дипломной работы является решение нелинейной транспортной задачи с дополнительными условиями, методом отсечений Гомори. Так как данный метод применятся только для линейных задач, а рассматриваемая задача является нелинейной, то не сможем применить стандартный симплекс метод. Вместо этого можем воспользоваться приближенными методами решения нелинейных задач с сепарабельными функциями.

Дипломная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка использованных источников, приложений А и Б.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе содержится описание метода отсечений Гомори.

Общая идея решения задачи линейного программирования методами отсечения стала основой алгоритма, предложенного в 1957-1958 гг. американским ученым Р.Гомори. Суть методов отсечений состоит в том, что изначально задача решается без условия целочисленности. Если полученный план получился целочисленный, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, которое обладает следующими свойствами:

1) ограничение должно быть линейным;

2) должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

3) не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Пусть задача

$$\max(min)\, Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, & i = 1,2,\dots,m; \\ x_j \geq 0, & j = 1,2,\dots,n. \end{cases}$$

решена симплекс-методом и X^*- ее оптимальный план. Предположим, что данный план не является целочисленный. Тогда выберем число с максимальной дробной частью из столбца с нецелочисленными компонентами. Путем преобразований, описанных в разделе, получаем новое ограничение, которое так же является отсечением.

Далее, решаем расширенную задачу, с дополнительным отсечением. Так как в столбце свободных членов есть отрицательное число, то для решения новой задачи выполняем следующие условия:

1. В строке, которая содержит отрицательное число в столбце свободных членов, выбираем любое отрицательное число. По выбранном числу определяем разрешающий столбец.

2. Для чисел с одинаковыми знаками составляем симплексные отношения.

3. По минимальному симплексному отношению определяем разрешающую строку и отмечаем в таблице разрешающий элемент.

4. Выполняем симплексные преобразования с этим разрешающим элементом.

После того как будет получена оптимальная таблица для новой расширенной задачи, проверяем, является ли план целочисленным. Если да, то получено оптимальное целочисленное решение задачи линейного программирования, и на этом задача закончена. Если план оказывается нецелочисленным, то повторяем описанную выше процедуру до тех пор, пока не получим оптимальное целочисленное решение.

Во втором разделе рассматривается метод приближенного решения сепарабельных задач нелинейного программирования в λ-форме.

В данной дипломной работе, условие поставленной задачи в практической части является нелинейным. В связи с этим, мы не можем на первом этапе применить стандартный симплекс метод, потому что он применяется для решения линейных задач. Поэтому воспользуемся приближенными методами решения нелинейных задач с сепарабельными функциями. Другими словами, мы рассмотрим использование симплексного метода для получения решений задачи нелинейного программирования, в которой целевая функция и функции ограничений могут быть представлены в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Такая задача называется *задачей сепарабельного программирования* и формулируется она следующим образом:

(2.1)

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j)\,\{\leq,=,\geq\}\,b_i\,, \qquad i=1,\dots,m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j=1,\dots,n;$$

$$\text{Найти } \max(\min)\, z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

Далее, в разделе содержится описание построения λ формы приближенного решения сепарабельной функции, и в итоге задача выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{rj} g_{kij}\lambda_{kj}\ \{\leq,=,\geq\}\,b_i\ ,\ i=1,\dots,m,$$

$$\sum_{k=0}^{rj}\lambda_{kj}=1, j=1,\dots,n, \quad \lambda_{kj}\geq 0 \ \text{ при всех } k,j$$

$$\text{Найти } \max(\min)\, \hat{z} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{rj} f_{kj}\lambda_{kj}.$$

В третьем разделе решается нелинейная транспортная задача с использованием методов, которые описаны в первом и втором разделах.

Постановка задачи:

Имеется, как и в классической транспортной задаче, m обычных пунктов производства с объемом производства a_i ,i=1,...,m, и n пунктов потребления с объемом потребления b_j , j=1,..,n. Стоимость перевозки из обычных пунктов производства в обычные пункты потребления линейно зависит от объемов перевозки. Кроме того, у каждого i-го пункта производства имеется свой индивидуальный пункт потребления с объемом y_i. У каждого j-го пункта потребления также кроме обычных поставщиков имеется свой индивидуальный пункт производства с объемом w_j. Стоимость перевозки в дополнительные пункты потребления и из дополнительных пунктов производства линейно зависит от объемов перевозки.

Итак, перейдем к условию нашей задачи. Имеем целевую функцию:

$w_2^3/30+w_1^2/4+4x_{11}+8x_{12}+y_1^2/5+16x_{21}+18x_{22}+y_2^3/15 \to min$

И ограничения:

$x_{11}+ x_{12}+ y_{11}+ y_{12}=150,$

$x_{21}+ x_{22}+ y_{21}+ y_{22}=170,$

$x_{11}+ x_{21}+ w_{11}+ w_{12}=140,$

$x_{12}+ x_{22}+ w_{21}+ w_{22}=180, \quad x_{ij}\geq 0, y_i\geq 0, w_i\geq 0.$

Решение задачи будет состоять из двух этапов:

1. Сначала решаем нелинейную задачу методом, описанном в разделе 2. Т.е приближенными методами решения нелинейных задач с сепарабельными функциями.

В λ-форме задача выглядит следующим образом:

$4x_1+8x_2+16x_3+18x_4+\sum_{k=0}^{15}\lambda_{k1}f_{5k}+\sum_{k=0}^{14}\lambda_{k2}f_{6k}+\sum_{k=0}^{17}\lambda_{k3}f_{7k}+\sum_{k=0}^{18}\lambda_{k4}f_{8k} \to min$

$x_1+ x_2+ \sum_{k=0}^{15}\lambda_{k1}x_{5k}=150,$

$x_3+ x_4+ \sum_{k=0}^{17}\lambda_{k3}x_{7k}=170,$

$x_1+ x_3+ \sum_{k=0}^{14}\lambda_{k2}x_{6k}=140,$

$x_2+ x_4+ \sum_{k=0}^{18}\lambda_{k4}x_{8k}=180,$

$\sum_{k=0}^{15}\lambda_{k1}=1, \lambda_{k1}\geq 0,$

$\sum_{k=0}^{14}\lambda_{k2}=1, \lambda_{k2}\geq 0,$

$\sum_{k=0}^{17} \lambda_{k3} = 1$, $\lambda_{k3} \geq 0$,

$\sum_{k=0}^{18} \lambda_{k4} = 1$, $\lambda_{k4} \geq 0$,

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Получили линейную задачу , которая решается симплекс-методом .

2. Если решение задачи получилось нецелочисленное, то применяем метод Гомори, описанный в разделе 1.

По результатам вычислений представленных в дипломной работе, мы получили, что на первом этапе решения задачи, решение получилось нецелочисленное. В связи с этим, переходим ко второму этапу, а именно применение метода отсечений Гомори. После добавления нескольких отсечений, в результате мы получили целочисленное решение, что и является окончательным решением задачи. Итоговое решение:

$x_{11} = 136$; $x_{12} = 10$; $x_{21} = 0$; $x_{22} = 162$; $y_1 = 4$; $y_2 = 8$; $w_1 = 4$; $w_2 = 8$;

$F = 1.448 * 10^4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам вычислений, было получено целочисленное решение нелинейной транспортной задачи с дополнительными условиями. В статье Есенкова А.С данная задача была решена декомпозиционным методом. В дипломной работе был получен тот же ответ задачи, а значит целочисленное решение, которое было решено двумя методами линейного и нелинейного программирования является верным. На первом этапе решения, применяя приближенный метод сепарабельного программирования в λ-форме, получили оптимальный план, но компоненты данного плана являются нецелочисленные. Далее, был применен метод Гомори, и после добавления нескольких отсечений, было получено оптимальное целочисленное решение.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Базара, М. , Шетти, К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. - М.: Мир, 1982.

2. Кремер, Н.Ш., Путко, Б.А., Тришин, И.М., Фридман, М.Н. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов. М.: Юнити 2002.

3. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х томах. М.: Мир, 1991. - Т.1

4. Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х томах. М.: Мир, 1991. - Т.2

5. Хедли, Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М.: Мир, 1967.

6. Есенков, А.С., Леонов, В.Ю., Тизик, А.П., Цурков, В.И. Нелинейная целочисленная транспортная задача с дополнительными пунктами производства и потребления // Известия Ран. Теория и системы управления. -2015.-№1,с.88-94.

7. Gomory, R.E. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. Bulletin of the American mathematical Society, 1958.

8. Lemke, C.E. The dual method of solving the linear programming problem. Naval Research Logistics Quarterly, 1954.

9. Beale, E.M.L. An alternative method for linear programming. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1954.

10. Веремеенко, Т.В Высшая математика: учеб.-метод. пособие. Ч.4. Математическое программирование. Минск: ГИУСТ БГУ, 2010.