Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

# НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

## АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Механико-математического факультета
Коробчук Анфисы Вячеславовны

Научный руководитель
к.ф.м.-н., доцент ____________________ А. П. Гуревич
дата, подпись

Зав. кафедрой
д.ф.м.-н., профессор ____________________ А. П. Хромов
дата, подпись

Саратов 2016

# ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается оператор дифференцирования

$$Ly = y'(x), \quad x \in [0, 1], \tag{1}$$

определенный на множестве абсолютно непрерывных функций, у которых $y'(x) \in L_2[0, 1]$, и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 ty(t)dt = 0. \tag{2}$$

Работа состоит из трех разделов.

В первом разделе изучается функция Грина этого оператора дифференцирования. Далее, получена оценка снизу для функции $|\Delta(\lambda)|^{-1}$, где $\Delta(\lambda) = (1 - \lambda)e^{\lambda} + 1$.

Во втором разделе вводится понятие обобщенных средних Рисса ряда по собственным функциям рассматриваемого оператора, которые имеют вид:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda,$$

где $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ - резольвента оператора $L$.

При этом предполагается, что функция $g(\lambda, r)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g(\lambda, r)$ непрерывна по переменной $\lambda$ в круге $|\lambda| \leq r$ и аналитична по $\lambda$ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$;

2) при фиксированном $\lambda$, имеет место $\lim_{r\to\infty} g(\lambda, r) = 1$;

3) существует такая константа $C > 0$, что при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leq r$ выполняется неравенство $|g(\lambda, r)| \leq C$;

4) при любых $\gamma > 0$ справедлива оценка $g(r\exp(i\phi), r) = O\left(|\phi \pm \frac{\pi}{2}|^\gamma\right)$.

Далее, проводится описание класса функций $f(x)$, для которых их средние Рисса сходятся к $f(x)$ в пространствах $C^[0,1]$ или $C[h, 1-h]$.

В третьем разделе доказывается теорема о замыкании области определения оператора дифференцирования.

**Общая характеристика работы**

**Цели и задачи работы**

В данной работе найдены достаточные условия на $f(x)$, при выполнении которых обобщенные средние Рисса сходятся к $f(x)$, равномерно на отрезках $C^[0,1]$ или $C[h, 1-h]$, где $0 < h < \frac{1}{2}$. Далее, показано, что все достаточные условия "близки"к необходимым условиям. Приведенный в работе пример показывает, что все условия являются существенными.

**Актуальность работы**

Актуальность этой работы подтверждается наличием большого количества работ, посвященных этой проблематикой.

## Основное содержание работы

## Функция Грина краевой задачи и ее свойства

## Представление функции Грина

В этом разделе найдено представление резольвенты оператора $L$ для различных значений спектрального аргумента. На их основе получены оценка снизу для обратной величины характеристического определителя.

**Лемма 1.** *Если $\lambda \neq 0$, тогда имеют место следующие формулы:*

$\mathrm{R}_\lambda f = \dfrac{1}{\Delta}\int\limits_0^1 \left[(1-\lambda)e^{\lambda(1-t)} + \lambda t - 1\right] f(t)dte^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)dt, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \leq$ 0;

$$R_\lambda f = \frac{1}{\Delta}\int\limits_0^1 (\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}) f(t) dt e^{\lambda x} - \int\limits_x^1 e^{\lambda(x-t)} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}\lambda \geq 0; \qquad (3)$$

где $\Delta = (\lambda - 1)e^\lambda + 1$

## Оценка снизу характеристического определителя

**Лемма 2.** *(Об оценке снизу функции $\Delta$)*

*Имеют место оценки*

$$|\Delta|^{-1} = O(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}), \quad \lambda \in \Gamma_r^+;$$

$$|\Delta|^{-1} = O(1), \quad \lambda \in \Gamma_r^-.$$

где $\Gamma_r^+ (\Gamma_r^-)$ полуокружности $\{\lambda||\lambda| = r, \operatorname{Re}\lambda \geq 0 (\operatorname{Re}\lambda \leq 0)\}$ соответсвенно.

## Обобщенные средние Рисса

## Необходимое условие сходимости обобщенных средних Рисса к $f(x)$

В этом разделе изучаются обобщенные средние Рисса ряда по собственным функциям указанного выше оператора, которые имеют следующий вид

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda.$$

**Лемма 3.** *Для того, чтобы обобщенные средние Рисса ряда по собственным функциям оператора $L$ сходились к $f(x)$ в $C[0,1]$, необходимо, чтобы функция $f(x) \in C[0,1]$ и удовлетворяла условиям:*

$$1) \int\limits_0^1 t f(t) dt = 0;$$

$$2) f(1) - \int\limits_0^1 ty(t)dt = 0.$$

## Теорема о сходимости обобщенных средних Рисса на всем отрезке $[0,1]$

Обозначим через $Q_h$ множество функций $f(x) \in C[0,1]$, которые удовлетворяют условиям:

$$1) \int\limits_0^1 tf(t)dt = 0;$$

$$2) f(1) - \int\limits_0^1 f(t)dt = 0;$$

$$3) f(x) \in C^1[1-h,1].$$

**Теорема 4.** *Предположим, что $f(x) \in Q_h$ и удовлетворяет условию*

$$f'(1) - f(1) + f(0) = 0,$$

тогда при $\gamma \geq 1$,

$$\lim_{r\to\infty} ||f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R_\lambda f d\lambda|| = 0.$$

## Теорема о сходимости средних Рисса внутри $(0,1)$

Изучим теперь поведение средних Рисса при $x \in [h-1, h] (0 < h < \frac{1}{2})$. Введём в рассмотрение вспомогательную задачу

$$y' - \lambda y = f(x), \tag{4}$$

$$y(0) - y(1) = 0. \tag{5}$$

Собственными значениями этой задачи являются $\lambda_k = 2k\pi i, k \in Z$, а соответствующими собственными функциями являются $-\phi_k(x) = exp(2k\pi ix)$. Обозначим через $R^0_\lambda$ резольвенту (2.3)-(2.4). И рассмотрим обобщенные средние Рисса

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R^0_\lambda f d\lambda.$$

**Теорема 5.** *Для любой функции* $f(x) \in C[0,1]$ *и* $0 < h < \frac{1}{2}$

$$\lim_{r\to\infty} \max_{x\in[h-1,h]} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R^0_\lambda f d\lambda \right| = 0.$$

**Теорема 6.** *Для любой функции* $f(x) \in C[0,1]$ *и* $\gamma \geq 1$ *выполняется*

$$\lim_{r\to\infty} \max_{x\in[h-1,h]} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r} g(\lambda, r) R^0_\lambda f d\lambda \right| = 0.$$

## Замыкание области определения оператора

Обозначим через $D_L$ область определения оператора

$$L(y) = y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x)y(x), \quad x \in [0,1]$$

с условиями

$$V_j = U_j(y) - (y, \phi_j) = 0, \quad (j = 1, \cdots, n)$$

где

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{k_j}(a_{jk}y^{(k)}(0)+b_{jk}y^{(k)}(1)), \quad (y, \phi_j) = \int\limits_0^1 y(x)\phi_j(x)dx, \quad \phi_j(x) \in C[0,1].$$

Пусть $\alpha$ целое, удовлетворяющее $0 \leq \alpha \leq n-1$. Через $n_0$ обозначим наименьшее из $j$, для которых $\sigma_j \leq \alpha$, а через $D^0$-множество функций из $C^\alpha[0,1]$ удовлетворяющих условиям

$$V_j(y) = 0, j = n_\alpha, ..., n.$$

**Лемма 7.** *Если $f(x) \in D^0$, то существует такая последовательность функций $\{y_m(x)\}_{m=1}^\infty$, что*

$$1) y_m(x) \in C^n[0,1];$$

$$2) V_j(y_m) = 0, j = n_\alpha, ..., n;$$

$$3) y_m(x) \to f(x), \text{ по норме } C^\alpha[0,1].$$

**Лемма 8.** *При $i = 2, ..., n_\alpha$ справедливы включения $D_i \subset \overline{D}_{i-1}$.*

**Лемма 9.** *Справедливо равенство $\overline{D}_1 = D^0$.*

**Основные источники, используемые в работе:**


Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* //Изд-во Наука, 1969. 528 с.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу разложений по собственным функциям интегральных операторов* //Изв. Вузов. Математика. 2003. №2 (489). с. 24-35.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу спектральных разложений слабо нерегулярных краевых задач* //Spectral and evolution problems. Processing of the Twelfth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2002). September 18-29, 2002, Sevastopol, Laspi. Севастополь. Изд-во ТНУ, 2003. с. 113-120.

Freiling G., Kaufman F.G. *On uniform convergence of eigenfunctions expansions for indelinite eigenvalue problems* //Integral Equations Operator Theory. 1990. V.13(1990). p.193-215.

Корнев В.В., Хромов А.П. *Система дирака с недифференциальным потенциалом и антипенриодическими краевыми условиями* Изв. Сарат. ун-та. Новая серия Математика. Механика. Информатика 2013. Т.13, вып.3 с.28-35.

Шкаликов А.А. *Краевые задачи для однородных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* Тр. сем. им.И.Г.Петровеного, 9. Изд-во Моск. ун-та М., 1983 с.190-229.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу спектральных разложений оператора дифференцирования с интегральным условием* Сб. науч. тр. Механика. Математика, Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 45-48.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу спектральных разложений одного класса интегральных операторов Дифференц. уравнения* // 2001. - Т.37 №6.-с.809-814.

Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* -М.:Физмалит, 2003. т.3- 728с.

Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* 4изд. -М.,Наука, 1974. 331с.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов* Изв. вузов. Математика. 2001. №8(471). с.38-50.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу спектральных разложений оператора Штурма-Лиувилля в пространстве* $C^1[0,1]$ Математика. Механика. Сб. науч. трудов. Саратов. Изд. Саратовского университета, 2000, с.32-35.

Гуревич А.П., Хромов А.П. *Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов* Математика. Механика. Сб. науч. трудов. Саратов. Изд. Саратовского ун-та, 1999, с.21-24.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе изучен вопрос об описании класса функций $f(x)$, для которых обобщенные средние Рисса оператора дифференцирования с интегральным условием сходятся равномерно на всем основном отрезке $[0,1]$ или на произвольном внутреннем отрезке $[h, 1-h]$. При доказательстве основных утверждений важную роль играет асимптотика функции Грина и формулы остаточного члена.

Отдельный раздел посвящен описанию замыканию области определения дифференциального оператора.

При доказательстве теорем использовались факты, имеющиеся в [1]-[13].