Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Некорректно поставленные задачи вычислительной математики

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 411 группы

направление 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Аникьевой Екатерины Андреевны

Научный руководитель

К.ф-м.н., доцент	_______________	Д. В. Поплавский
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав.кафедрой

Д.ф-м.н., профессор	_______________	В. А. Юрко
должность, уч.степень, уч.звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2016

Введение

Наиболее активно развивающейся современной областью научных знаний является теория корректно и некорректно поставленных задач, большинство из которых имеют практическую ценность и требуют принятия решения в неопределенных или противоречивых условиях. Разработка и обоснование методов решения такого сложного класса задач, как некорректно поставленные, представляет собой актуальную проблему настоящего времени. Теория некорректно поставленных задач является аппаратом научного исследования для многих научных направлений, вроде дифференцирования приближенно заданных функций, решения обратных краевых задач, решения задач линейного программирования и систем управления, решение вырожденных или плохо обусловленных систем линейных уравнений и т.д.

Впервые понятие «корректно поставленная задача» было введено французским математиком Ж. Адамаром в 1923 г. в связи с расширением краевых задач для уравнений с частными производными математической физики. Понятие корректности задач явилось основанием для классификации краевых задач. В данном случае корректность постановки задачи обеспечивалась выполнением двух условий: существование решения и его единственность. Требование устойчивости решения было впоследствии присоединено к первым двум другими математиками уже при более углубленном изучении данного класса задач.

Долгое время по авторитетному мнению Ж. Адамара считалось, что некорректно поставленные (некорректные) задачи не могут иметь практического смысла и поэтому отсутствует необходимость в их разрешении. Существовало мнение, что некорректные задачи не могут встречаться при решении физических и технических задач, и что для такого рода задач невозможно реализовать построение приближённого решения (из-за отсутствия устойчивости). Позже расширение автоматизации привело к большому увеличению объёма экспериментальных данных и, в свою очередь, необходимость установления информации об естественнонаучных объектах все более требовала рассмотрения некорректно поставленных задач. Развитие электронной вычислительной техники и ее применение к решению математических задач неумолимо изменило точку зрения на возможность построения приближённых решений некорректно поставленных задач.

Первой работой, в которой выше упомянутое мнение Ж. Адамара было опровергнуто, считается известная статья «Об устойчивости обратных задач» А. Н. Тихонова в 1943 г., в которой последний конкретизировал общую постановку условно-корректной задачи и указал решение одной из актуальных задач разведочной геофизики.

Цель исследования настоящей дипломной (бакалаврской) работы состоит в том, чтобы провести сравнительный анализ предметного содержания теории некорректно поставленных задач на ряде примеров, изложив их теоретические основы. После чего разработать численные алгоритмы и провести численные эксперименты. Для последнего использовать язык программирования высокого уровняC++.

Основное содержание работы

Данная бакалаврская работа состоит из двух глав: теоретической и практической.

Глава 1 (теоретическая) разделена на четыре параграфа:

- **Понятие корректно и некорректно поставленных задач.**

Корректно и некорректно поставленные задачи относятся к такому широкому классу математических задач, которые возникают в самых различных областях: физике, технике, в частности – задачи обработки результатов физических экспериментов.

Таким образом,корректность задачи фиксируется:

а) либо с точки зрения анализа исходных данных на полноту, непротиворечивость, независимость;

б) либо с точки зрения разрешимости задачи: существует решение или оно отсутствует в силу каких-то обстоятельств, однозначно ли определено множество решений задачи.

Оба эти аспекта имеют место в определении корректности задачи по Адамару – Тихонову и составляют содержание математической определенности задачи (первые два условия корректности). Третье же условие корректности задачи по Адамару – Тихонову, не рассматриваемое в большинстве случаев различными авторами, - устойчивость решения – предполагает глубокий анализ всех компонентов задачи, выявляет их существенность.

Приведу отдельно определение Ж. Адамара.

Ряд задач математической физики сводится к необходимости решения уравнения вида

$$Au = f, \;\; f \epsilon F, \tag{1.1}$$

где $A\colon D_A \subseteq U \to F$ – оператор с непустой областью определения D_A, действующий из метрического пространства U в аналогичное пространство F. Задание пространств U и F является необходимым элементом математической постановки задачи (1), в тесной связи с которым находится важное определение ее корректности.

Задача (1) называется корректно поставленной (корректной), если выполнены следующие условия:

1) Область значений D_A оператора A совпадает с F (условие разрешимости);
2) Равенство $Au_1 = Au_2$для некоторых $u_1, u_2 \in D_A$ влечет равенство $u_1 = u_2$ (условие единственности);
3) Обратный оператор A^{-1} непрерывен на F (условие устойчивости).

Приведу также определение А. Н. Тихонова.

По его определению почти все математические задачи состоят в том, что по исходным данным u имеется решение z. При этом существует связь между ними: $z = R(u)$. Задача называется корректной или корректно поставленной, если выполнены следующие условия:

1) Задача имеет решение при любых допустимых исходных данных u (существование решения);
2) Каждым исходным данным u соответствует только одно решение z (единственность решения);
3) Решение устойчиво.

Смысл первого условия заключается в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, что исключало бы возможность решения задачи. Второе условие означает, что исходных данных достаточно для однозначной разрешимости задачи. Эти два условия обычно называются условиями математической определенности задачи.

Третье условие рассматривается отдельно. Если u_1 и u_2 – два различных набора исходных данных, мера уклонения которых друг от друга достаточно мала, то мера уклонения решений $z_1 = R(u_1)$ и $z_2 = R(u_2)$ меньше любой наперед заданной точности. При этом предполагается, что в многообразии $U = \{u\}$ допустимых исходных данных и в многообразии возможных решений $Z = \{z\}$ установлено понятие меры уклонения $\rho_u(u_1, u_2)$ и $\rho_z(z_1, z_2)$. Третье условие трактуется как физическая определенность задачи. Это объясняется тем, что исходные физические задачи, как правило, задаются с некоторой погрешностью; при нарушении третьего условия как угодно малые возмущения исходных данных могут вызвать большие отклонения в решении.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий корректности, называются некорректными или некорректно поставленными.

В настоящее время под названием «некорректно поставленные» («некорректные») задачи принято понимать любые задачи, неустойчивые относительно входных данных, или задачи, не имеющие точных решений и разрешимые лишь приближенно.

- **Формулы численного дифференцирования.**

Невозможность сделать погрешность аппроксимации производных разностными отношениями сколько угодно малой даже при убывании погрешностей вычисления значений функции вынуждает считать задачу численного дифференцирования некорректной. Здесь нарушается одно из условий корректности, а именно: нет непрерывной зависимости точности результата от точности входных данных в том смысле, что в процессе $h \to 0$ ошибка в значениях функции может убывать, а ошибка результата – бесконечно расти.

Пусть значение функции $f(x)$ в точке x представляется последовательностью приближений $y_k(x)$ с ошибками, уменьшающимися при$k \to \infty$ по закону $\frac{\sin{(k^2 x)}}{k}$, т.е.

$$f(x) = y_k(x) + \frac{\sin{(k^2 x)}}{k} \forall k \in N. \qquad (1)$$

Тогда, если при использовании формулы правой аппроксимации производной

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Вместо $f(x)$ будут подставляться приближения $y_k(x)$, т.е. будет применяться формула

$$f'(x) \approx y'_k(x) \coloneqq \frac{y_k(x+h)-y_k}{h},$$

то порождаемая такой подменой ошибка на основе *(1)* при каждом $k \in N$ будет составлять величину

$$E \coloneqq \frac{\sin\left(k^2(x+h)\right)-\sin(k^2x)}{kh} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{k^2h}{2}\right)\cos\left(k^2\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)}{kh} =$$

$$= k\frac{\sin\left(\frac{k^2h}{2}\right)}{\frac{k^2h}{2}}\cos\left(k^2\left(x+\frac{h}{2}\right)\right).$$

Последнее представление показывается, что если $k \to \infty$ и $h \to 0$ так, что $k^2h \to 0$, то величина E может неограниченно возрастать. Следовательно, $y'_k(x) \nrightarrow f'(x)$.

Также приведены и другие примеры формул численного дифференцирования, подтверждающие определение некорректности задач.

- **Интегральное уравнение Фредгольма первого рода.**

Задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Q_y = \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x)$$

относится к классу некорректных задач.

Пусть ядро $K(x,s)$ вещественно и симметрично, т.е. $K(s,x) = K(x,s)$.Предположим также, что $K(x,s)$ и $f(x)$ непрерывны. Тогда существует полная ортонормированная система собственных функций φ^n оператора Q:

$$Q\varphi_n = \int_a^b K(x,s)\,\varphi_n(s)ds = \lambda_n\varphi_n(x),$$

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(s)\varphi_j(s)ds = \delta_i^j,$$

где δ_i^j – символ Кронекера. При этом

$$K(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\varphi_n(x)\varphi_n(s),$$

сходимость ряда в правой части понимается в норме:

$$\|F(x,s)\| = \sqrt{\int_a^b\int_a^b |F(x,s)|^2 dxds}.$$

Из предыдущего соотношения следует, что

$$\|K\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

и, следовательно, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассматривается случай, когда $\lambda_n \neq 0$ при $1 \leq n \leq n_0$ и все $\lambda_n = 0$ при $n > n_0$. Тогда ядро имеет вид

$$K(x,s) = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_i\varphi_n(x)\varphi_n\,(s),$$

т.е. является вырожденным. В случае вырожденного ядра

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_n(s)y(s)ds = \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n(\varphi_n, y)\varphi_n(x) = f(x).$$

Следовательно, задача (1) может иметь решение только в том случае, когда$f(x)$является линейной комбинацией $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n_0}(x)$, т.е. записывается в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n_0} f_n \varphi_n(x).$$

- **Задача Коши для уравнения Лапласа.**

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t), t > 0, \\ u_{|t=0} = 0, u_{t|t=0} = \frac{1}{k} sinkx. \end{cases}$$

Решением является функция

$$u_k(x,t) = \frac{shkt}{k^2} sinkx.$$

При $k \to +\infty$ видно, что $\frac{1}{k} sinkx \rightrightarrows 0$ по x. Следовательно, решение должно приближаться также к 0. Однако, в общем случае, когда $x \neq \pi n, n = 0, \mp 1, \dots, u_k(x,t) \nrightarrow 0, k \to \infty$. Т.е. непрерывной зависимости от начальных данных нет, что означает, что задача поставлена некорректно.

Глава 2 (практическая) содержит численные эксперименты, проведенные к параграфам 2-4 главы 1. Приведены программы, реализованные на языке высокого уровня С++, которые показывают практическую реализацию темы данной бакалаврской работы.

- **Задача 1.**

Рассматриваем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задано значение производной $y' = f(x, y)$ и начальное значение функции в точке $y(x_0) = y_0$. Используется для решения численный метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Для заданного шага h, данный метод позволяет найти значения функции в точках $x + h, x + 2h$ и т.д.

- **Задача 2.**

Задан некоторый функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Необходимо проверить сходимость этого ряда по методу Чезаро. Если ряд сходится по методу Чезаро, найти сумму этого ряда.

Проходя по элементам ряда, начиная с первого, будем поддерживать сумму всех просмотренных на данный момент элементов. С помощью этого значения будем находить средние арифметические значения первых nчастичных сумм для каждого n. Если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{1+\cdots+}s_n}{n} = S$$

где $S < \infty$, тогда ряд сходится по Чезаро и сумма ряда равны S. В противном случае ряд расходится.

- **Задача 3.**

Задана прямоугольная область и значения функции $U(x, y)$ на границах данной области.

Необходимо решить численными методами уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

для значений внутри заданной области, удовлетворяющее при $y = 0$ условиям

$$u(0, x) = 0,$$

$$u_y(0, x) = \frac{1}{n^k} \sin nx,$$

Переменные x и y независимые.

Разбиваем прямоугольную область на равные N отрезков по каждому из измерений. Заменим в исходном уравнении вторые производные приближенными разностными отношениями $u(x, y)$. Получим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}\left(u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}\right),$$

где $0 < i < N, 0 < j < N$.

Итерационным методом переходя от слоя к слою будем решать данное уравнение пока максимальная погрешность между элементами слоя не будет меньше ε. Начальный слой задается граничными значениями, значения внутри области равны 0.

Заключение

В данной бакалаврской работе рассмотрены задачи, которые относятся к теории корректно и некорректно поставленных задач. Также проведены численные эксперименты с целью показать, как можно решить данный класс математических задач.

Приняв определение корректно и некорректно поставленных задач по Адамару-Тихонову в качестве основного, мною были сделаны некоторые выводы:

1. Корректность задачи - это относительное понятие, связанное со всеми компонентами заданной задачи. Обратимся к словам Ж. Адамар: «Не стоит понимать некорректность задачи столь абсолютно».
2. Признание задачи некорректной в заданных условиях не означает невозможность ее решения в дальнейшем.
3. Некорректно поставленная задача часто дает толчок развития науке, приводит к открытиям и новым теориям.
4. Решение задач в условиях неопределенности, переопределенности и противоречивости данных – это сегодняшний день науки и практики, при этом математическим аппаратом выступает теория корректно и некорректно поставленных задач А. Н. Тихонова. Именно поэтому решение такого класса сложных задач в большинстве случаев проводятся методами А. Н. Тихонова, где в качестве основного принимается определение некорректной задачи по Адамару – Тихонову.

В заключение хотела бы подчеркнуть, что в процессе выполнения дипломной работы были проведены эксперименты на языке программирования высокого уровняC++, чтобы показать различные варианты решения такого сложного класса задач.

Хотелось бы также отметить, что в современной практике некорректно поставленные задачи могут возникать при обработке геофизических, геологических, астрономических наблюдений, при решении проблем оптимального управления и планирования.