

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗГИБЕ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 — Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Филиппских Романа Дмитриевича

Научный руководитель
проф. каф. МТУиБМ, д.ф.-м.н. _____

М. В. Вильде

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____

Л. Ю. Коссович

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. В современной промышленности, а также в строительстве, широко используются элементы конструкций, моделируемые как тонкие упругие пластины, работающие на изгиб. Расчет таких элементов на прочность при действии заданных нагрузок входит в процесс проектирования конструкции как один из необходимых его этапов. Особенностью тонкостенных конструкций, испытывающих изгибные деформации, является возникновение больших напряжений, неравномерно распределенных по толщине, что предъявляет повышенные требования к точности применяемых математических моделей и методов расчетов. В связи с этим продолжает оставаться актуальной проблема поиска аналитических методов решения задач об изгибе пластин простой геометрической формы, которые могли бы послужить тестовыми примерами при разработке новых моделей и построении расчетных схем. Данная работа посвящена изучению и сравнительному анализу современных методов решения задачи об изгибе прямоугольной пластины под действием моментов и перерезывающих сил, распределенных по двум противоположными сторонам, в то время как две другие противоположные стороны свободны от напряжений.

Целью данной работы является сравнение и оценка применимости трех методов решения задачи об изгибе прямоугольной пластины: численно-аналитического метода однородных решений, метода конечного элемента и метода обобщенной биортогональной системы для функций Папковича. Исследование проводится на примере **задачи** об изгибе пластины, две противоположные стороны которой свободны, а к двум другим противоположным сторонам приложены заданные моменты и перерезывающие силы.

Материалы и методы исследования. В работе рассматривается изгиб тонкой линейно упругой изотропной пластины. Для описания изгибной деформации применяется классическая теория изгиба пластин Кирхгофа. При анализе разложений по функциям Папковича, полученных с помощью соотношений обобщенной биортогональности, предложен другой метод вывода указанного разложения, основанный на использовании преобразования Лапласа.

Научная значимость работы состоит в установлении невозможности получения аналитического решения задачи об изгибе пластинки с помощью соотношений обобщенной биортогональности для системы функций Папковича.

Структура и объем работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 7 разделов, заключения, списка использованных источников, включающего 20 наименований. Работа изложена на 51 листе машинописного текста и содержит 12 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается важность разработки методов расчета деформации пластин при действии изгибающей нагрузки, излагаются и описываются основные методы, используемые в наше время. Также обозреваются основные вехи в развитии теории изгиба пластин и решений задач для прямоугольной пластины.

В первом разделе дана постановка задачи об изгибе прямоугольной пластины, срединная плоскость которой занимает в декартовых координатах x, y область $-l \leq x \leq l, -h \leq y \leq h$. Приводятся уравнения классической теории изгиба пластин Кирхгофа: уравнения равновесия, выражения для изгибающих и скручивающего моментов, углов поворота, перерезывающих сил.

Из этих уравнений получаем основное дифференциальное уравнение теории изгиба пластин

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0. \quad (1)$$

Для постановки граничных условий в случае отсутствия закрепления вводятся предложенные Кирхгофом обобщенные перерезывающие силы

$$\begin{aligned} K_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ K_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

В работе рассматривается изгиб пластины моментами и перерезывающими силами, распределенными по торцам $x = \pm l$. Боковые стороны $y = \pm h$

свободны от напряжений. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\text{при } x = \pm l : M_x = M_x^0(y), K_x = \pm K_x^0(y), \quad (3)$$

$$\text{при } y = \pm h : M_y = K_y = 0, \quad (4)$$

где $M_x^0(y)$, $K_x^0(y)$ – заданные функции. В данной работе рассматривается случай симметричной деформации пластины относительно осей x и y . Поэтому в работе считается, что $M_x^0(y)$, $K_x^0(y)$ – чётные функции.

К условиям (3), (4) следует добавить условия в угловых точках

$$M_{xy}(\pm l, h) = \pm H_0, M_{xy}(\pm l, -h) = \mp H_0. \quad (5)$$

Для существования решения задачи необходимо выполнение условия самоуравновешенности нагрузки

$$\int_0^h K_x^0(y) dy = 2H_0. \quad (6)$$

Поставленная задача представляет собой первую основную задачу теории упругости. На основании теоремы единственности задание напряжений на границе тела единственным образом определяет напряжённое состояние тела, в нашем случае – моменты и перерезывающие силы. Перемещения (в нашем случае – прогиб пластины) определяются с точностью до жесткого смещения. Далее отмечается, что во все записанные уравнения входят только линейные дифференциальные операторы с действительными коэффициентами. Для удобства математических выкладок можно рассматривать неизвестные функции как комплекснозначные, при этом все соотношения задачи выполняются по отдельности для действительной и мнимой частей. При задании действительных функций в граничных условиях решение поставленной задачи не может иметь никаких произвольных мнимых составляющих, кроме произвольной мнимой постоянной в функции прогиба.

Во втором разделе строится система частных решений дифференциального уравнения (1), удовлетворяющих однородным граничным условиям

(4). Эта система имеет вид

$$W^{(k)}(x, y) = w(\lambda_k, y)e^{\lambda_k x}, \quad (7)$$

где

$$w(\lambda_k, y) = \frac{\lambda_k}{2}([\nu + 1] \sin(\lambda_k h) + (\nu - 1)\lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) + (\nu - 1)\lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y), \quad (8)$$

λ_k являются корнями уравнения

$$L(\lambda) = -\frac{1}{4}(\nu - 1)\lambda^3(2\lambda h(\nu - 1) + (\nu + 3) \sin(2\lambda h)) = 0. \quad (9)$$

Подставляя (7) в выражения для моментов, углов поворота и перерезывающих сил, получим функции, каждая из которых представляет частное однородное решение поставленной задачи для углов поворота, моментов и обобщенных перерезывающих сил. Ниже приведен вид функций для $M_x^{(k)}(x, y)$ и $K_x^{(k)}(x, y)$:

$$M_x^{(k)}(x, y) = m_x(\lambda_k, y)e^{\lambda_k x}, K_x^{(k)}(x, y) = \chi_x(\lambda_k, y)e^{\lambda_k x}, \quad (10)$$

где

$$m_x(\lambda_k, y) = \frac{(\nu - 1)^2}{2}\lambda_k^3([\lambda_k h \cos \lambda_k h - \sin \lambda_k h] \cos \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y), \quad (11)$$

$$\chi_x(x, y) = \frac{(\nu - 1)\lambda_k^4}{2} \{[(\nu - 5) \sin(\lambda_k h) - (\nu - 1)\lambda_k h \cos(\lambda_k h)] \cos(\lambda_k y) - (\nu - 1)\lambda_k y \sin(\lambda_k h) \sin(\lambda_k y)\}.$$

Функции (8) и (11) называют функциями Папковича. Нетрудно проверить, что функции $m_x(\lambda_k, y)$, $\chi_x(\lambda_k, y)$ удовлетворяют соотношениям

$$\int_0^h m_x(\lambda_k, y) dy = 0, \int_0^h \chi_x(\lambda_k, y) dy = 2m_{xy}(\lambda_k, h), \quad (12)$$

которые соответствуют принятым условиям отсутствия элементарного решения и самоуравновешенности нагрузки.

В третьем разделе рассматривается численно-аналитический метод решения поставленной задачи. Вводится новая переменная $x_1 = x + l$. Искомое решение представляется в виде конечной суммы (здесь n_0 – нечетное целое число).

$$W(x_1, y) = \sum_{k=1}^{n_0} C_k w_k(\lambda_k, y) (e^{-\lambda_k x_1} + e^{-\lambda_k (2l - x_1)}). \quad (13)$$

Для численного определения неизвестных постоянных C_k применяется метод коллокаций. Потребуем удовлетворения граничных условий (3) в отдельных точках отрезка $[-h, h]$ (точки коллокаций). В силу симметрии достаточно выполнить граничные условия на отрезке $[0, h]$. Подставляя (13) в граничные условия в выбранных точках, получим линейные соотношения между неизвестными постоянными C_k , $k = \overline{1, n_0}$. Число точек коллокаций должно быть таково, чтобы число соотношений было равно числу неизвестных C_k , то есть n_0 . Точки коллокаций будем располагать равномерно во всей области удовлетворения граничным условиям. Вычислительные эксперименты показали, что требование выполнения граничных условий в угловой точке приводит к появлению больших погрешностей между точками коллокаций. Эту трудность можно обойти следующим образом: вместо удовлетворения граничным условиям в угловой точке будем требовать выполнения условий статической уравновешенности погрешностей. После вычисления постоянных C_k можно рассчитать любую характеристику НДС в любой точке пластины.

В четвертом разделе рассматривается новый метод построения точного решения рассматриваемой задачи¹, основанный на теории построения обобщенной биортогональной системы для системы функций Папковича². Согласно этой теории, на первом этапе построения решения записывается

¹Абруков Д. А. Изгиб прямоугольной пластины со свободными продольными краями, на торцах которой заданы обобщенные поперечные силы и изгибающие моменты. Точное решение краевой задачи // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2015. №2(24). С.3-32.

²Коваленко М. Д., Шуляковская Т. Д. Разложения по функциям Фадля–Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. МТТ. 2011, №5. С. 78–98.

т.н. “разложение Лагранжа” для одной заданной функции $M_x^0(y)$:

$$M_x^0(y) = A_1 m_x(\lambda_1, y) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k m_x(\lambda_k, y) + \bar{A}_k m_x(\bar{\lambda}_k, y), \quad (14)$$

Коэффициенты разложения (14) определяются приемом Фурье с помощью обобщенных соотношений биортогональности. Очевидно, что “разложение Лагранжа” не содержит произвольных элементов, все его коэффициенты однозначно определяются заданной функцией. В основах теории отмечается, что “разложение Лагранжа” не единственно (это, конечно же, верно: задавая разные перерезывающие силы на торце, мы будем получать разное НДС, а значит, разные коэффициенты разложения изгибающего момента на торце). Неединственность разложения в рассматриваемом методе связана с возможностью различного продолжения заданной функции вне отрезка $y \in [-h, h]$. Кажалось бы, теперь авторы должны перейти к вопросу поиска продолжения, приводящего к разложению, удовлетворяющему обоим граничным условиям на торце (это и было бы искомое решение поставленной краевой задачи) – но ни в цитированных работах, ни в каких-либо других известных нам работах, использующих рассматриваемый метод, другие продолжения не рассматриваются, всегда используется только простейшее периодическое продолжение.

Поскольку разложение по системе однородных решений почленно удовлетворяет всем соотношениям задачи, кроме граничных условий на торце, при подстановке в него коэффициентов “разложения Лагранжа” получается некоторое решение краевой задачи изгиба пластины. НДС пластины, определяемое этим решением, будем называть далее *специальным частным решением задачи об изгибе прямоугольной пластины* (для краткости просто *специальным частным решением*). На рисунках 1 и 2 приведены графики моментов и перерезывающих сил на торце пластины (n – число членов разложения). Как видно из приведенных примеров, “разложение Лагранжа” действительно довольно быстро сходится к раскладываемой функции. Перерезывающая сила на торце при этом имеет вид некоторой функции, однозначно определяемой заданием изгибающего момента. Эту функцию мы обозначим $K_s(y)$. Также при проведении численных экспериментов было обнаружено,

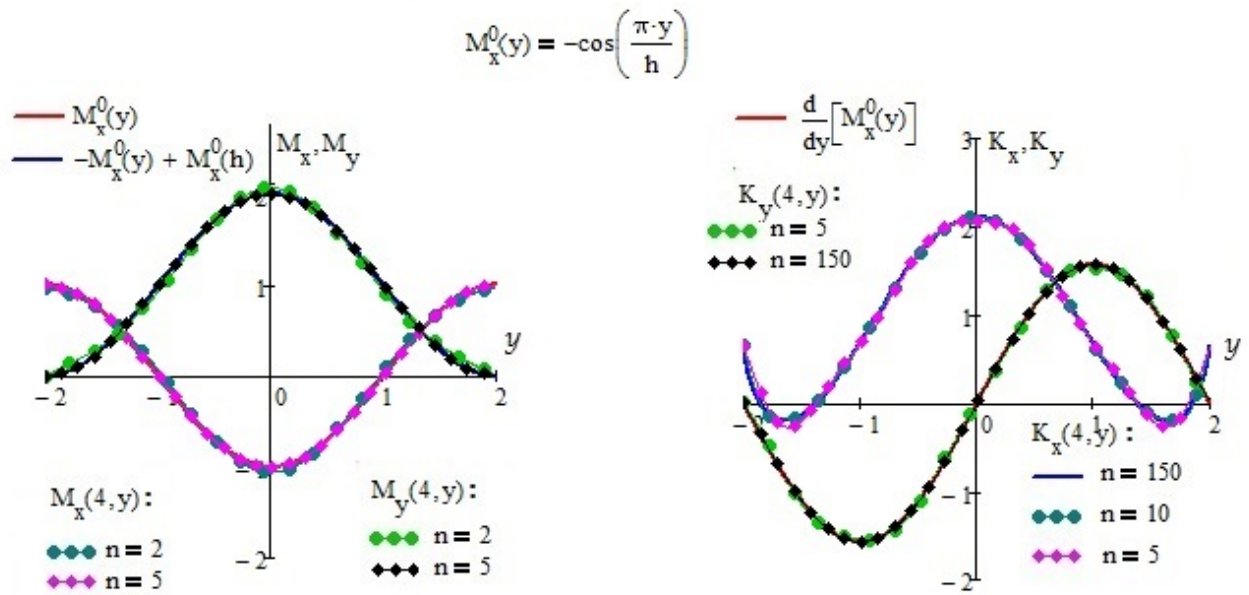


Рисунок 1 – Моменты и перерезывающие силы на торце, пример 1.

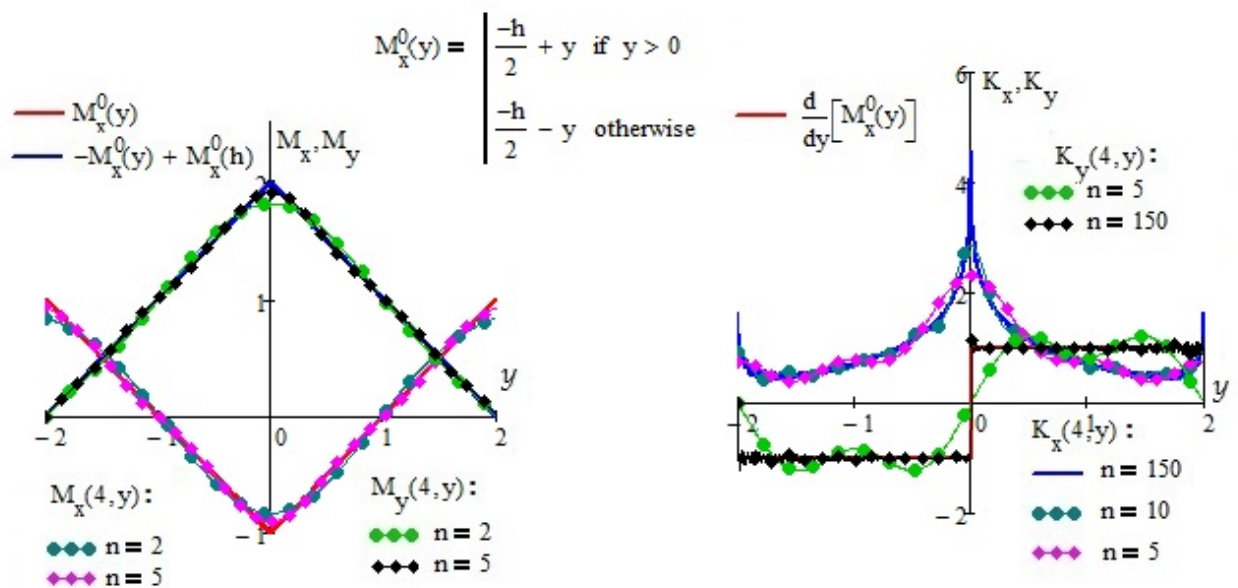


Рисунок 2 – Моменты и перерезывающие силы на торце, пример 2.

что изгибающий момент M_y удовлетворяет на торце условию

$$M_y(l, y) = -M_x^0(y) + M_x^0(h), \quad (15)$$

а перерезывающая сила K_y – условию

$$K_y(l, y) = M_x^{0'}(y). \quad (16)$$

Можно показать, что второе условие является следствием первого. Поскольку специальное решение не позволяет удовлетворить граничным условиям на торцевых поверхностях пластины, его нельзя признать решением краевой задачи – ни точным, ни приближенным. Попытка всё же удовлетворить условию для перерезывающей силы приводит к решению, абсурдному с механической точки зрения. В разделе 7 будет приведен численный пример, иллюстрирующий неприменимость полученных таким образом соотношений к расчету пластин на прочность.

В пятом разделе специальное частное решение из предыдущего раздела выводится иным методом. Прежде всего из уравнений равновесия, выражений для моментов и обобщенных перерезывающих сил исключаются величины Q_x , Q_y , M_{xy} и находят $\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}$ и выражаются производные $\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}$. Далее к задаче применяется интегральное преобразование Лапласа по переменной x . Уравнение для изображения изгибающего момента M_y имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^4 M_y^L}{dy^4} + 2\lambda \frac{d^2 M_y^L}{dy^2} + \lambda^4 M_y^L = \lambda \frac{1-\nu}{1+\nu} M_x^{0''}(y) + K_x^{0''}(y) + \\ + \frac{2\lambda}{1+\nu} f_1''(y) + \lambda^3 f_1(y) + \lambda^2 f_2(y). \end{aligned} \quad (17)$$

Искомое решение представляется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Для нахождения общего решения однородного уравнения принимается соотношение

$$f_1(y) = M_y|_{x=0} = -M_x^0(y) + M_x^0(h). \quad (18)$$

Функция $f_2(y)$ после этого определяется из соотношения для K_x . С помощью разложения в ряд Фурье функций $M_x^0(y)$, $K_x^0(y)$ и $Q(y)$ находится частное решение $R(\lambda, y)$ уравнения 17 в виде разложения в ряд Фурье. После этого строится решение задачи в изображениях. Обращение проводится для момента M_x с помощью разложения по вычетам. В результате получается решение, в котором представление момента M_x на торце полностью совпадает с “разложением Лагранжа”. Однако теперь мы убедились, что оно удовлетворяет двум граничным условиям на торце: условию для изгибающего момента M_x и условию (18), наложенному с целью получения наиболее простой формы

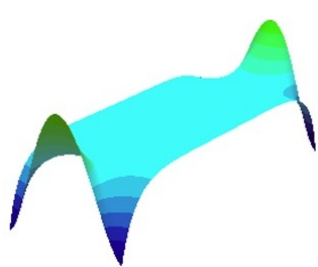
частного решения неоднородного уравнения. В задачах теории упругости вообще и изгиба упругой пластины в частности напряжения и другие силовые факторы не задаются на площадках, перпендикулярных границе. Это внутренние напряжения, в определении которых и состоит прежде всего цель решения задач теории упругости.

В шестом разделе поставленные задачи решаются в системе моделирования Ansys методом конечных элементов. Выбирается элемент SHELL63 с опцией Bending only (остальные по умолчанию), строится прямоугольная область $x \in [-l, l]$, $y \in [-h, h]$, задаются характеристики материала и разбивается на сетку квадратных конечных элементов. Задаются соответствующие граничные условия, при этом обосновывается процесс и специфика их задания для поставленной задачи.

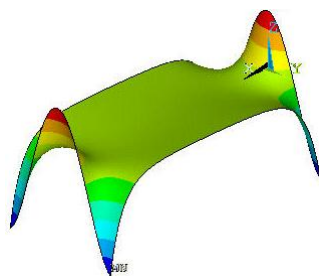
В седьмом разделе производится сравнение численных результатов, полученных тремя методами. Рассматривается две задачи. В **задаче 1** на торцах пластины ставятся граничные условия

$$\text{при } x = \pm l : M_x = M_0 f(y), K_x = 0, \quad (19)$$

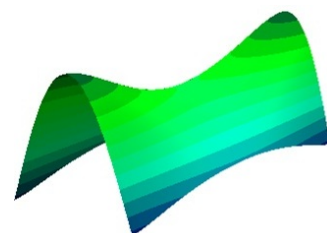
где $M_0 = \frac{h^3(\nu-1)^2}{6}$, $f(y) = \frac{3y^2}{h^2} - 1$, $h = 2$, $l = 4$. На рисунке 3 представлены формы пластины после деформации, полученные тремя разными методами.



a – Численно-аналитическое решение.



b – Конечно-элементное решение.



c – “Точное решение”.

Рисунок 3 – Форма пластины после деформации (задача 1).

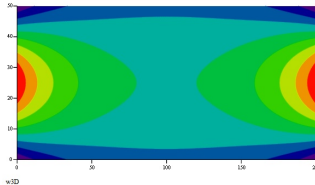
Приближенные решения, полученные принципиально различными методами, совпадают не только качественно, но и количественно с погрешностью 0,2%. При этом “точное решение” качественно отличается и не соответствует интуитивным представлениям о деформации пластины при действии данной нагрузки, следовательно, его нельзя признать верным решением по-

ставленной задачи.

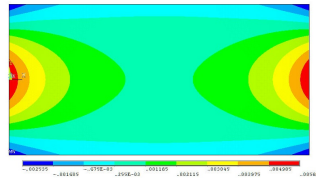
Далее рассматривается задача со специальными граничными условиями

$$\text{при } x = \pm l : M_x = -\cos\left(\frac{y\pi}{h}\right), K_x = \pm K_s(y). \quad (20)$$

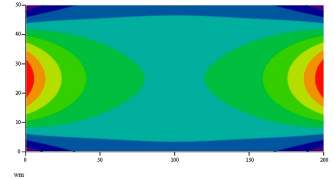
(задача 2). На рисунке 4 представлены контурные графики прогиба пластины, на рисунке 5 – результаты для моментов и перерезывающих сил, полученные численно-аналитическим методом и в Ansys.



а – Специальное частное решение.



б – Конечно-элементное решение.



в – Численно-аналитическое решение.

Рисунок 4 – Контурный график прогиба (задача 2).

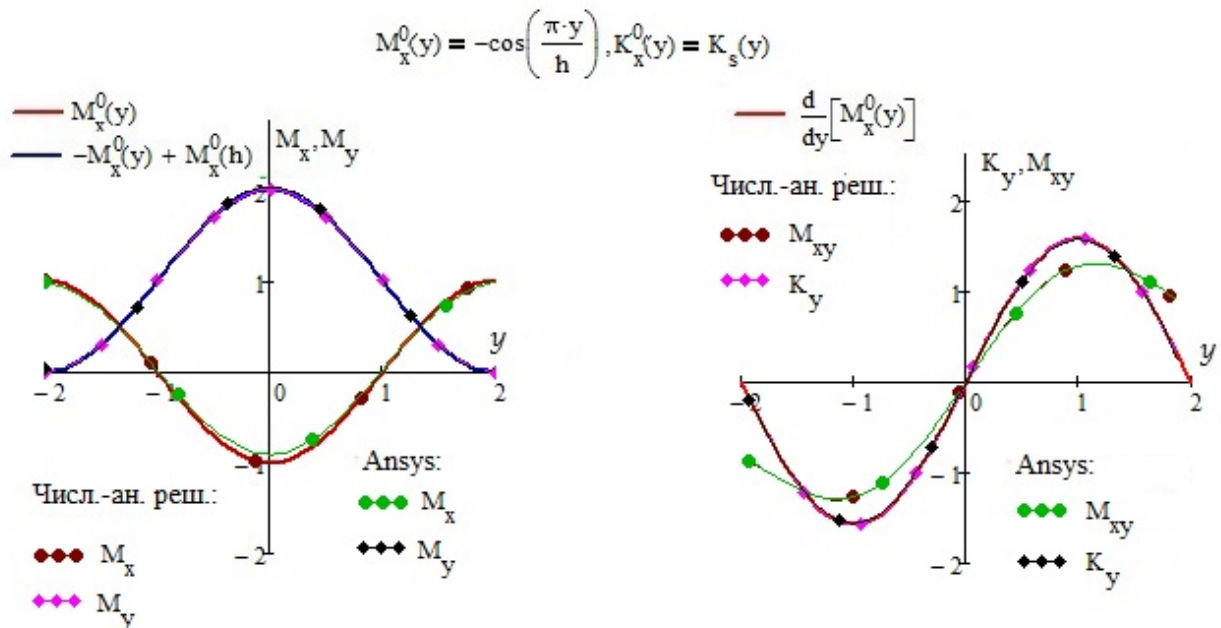


Рисунок 5 – Моменты и перерезывающие силы на торце (задача 2).

Теперь все три решения совпадают, что подтверждает правильность сделанных выше выводов о свойствах специального частного решения. Как видно из рисунка 5, специальные условия для M_y и K_y выполняются и в том, и в другом численном решении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение трех методов решения задачи об изгибе прямоугольной пластины, две противоположные стороны которой свободны, а к двум другим противоположным сторонам приложены заданные моменты и перерезывающие силы, выявило следующее:

- Численно-аналитическое решение, основанное на методе однородных решений, приводит к тем же результатам, что и метод конечных элементов, но при этом требует меньших затрат времени и вычислительных ресурсов. Преимуществом метода конечного элемента является его универсальность.
- Точное решение в виде ряда с коэффициентами, выраженными в замкнутой форме, существует только для пластины, на двух противоположных сторонах которой ставятся условия шарнирного опирания. “Точное решение”, основанное на обобщенных соотношениях биортогональности для функций Папковича, дает неверные результаты, абсурдные с механической точки зрения.
- Коэффициенты “разложения Лагранжа”, которое получается на первом этапе построения “точного решения”, можно рассматривать как коэффициенты разложения по системе однородных решений некоторого специального частного решения задачи об изгибе прямоугольной пластины. В данной работе показано, что это частное решение представляет собой верное решение задачи для следующего частного случая: нагрузки на торцах пластины подобраны таким образом, что выполняются условия

$$M_x|_{x=\pm l} = M_x^0(y), \quad M_y|_{x=\pm l} = -M_x^0(y) + M_x^0(h),$$

где $M_x^0(y)$ – заданная функция. В классической постановке задачи об изгибе пластины моменты на площадках, перпендикулярных к краю пластины, не задаются. Возможно, данное частное решение найдет применение при решении обратных задач или задач управления.