Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Оценка погрешности приближенного решения уравнения Абеля

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)__2___ курса __217__группы

направления _01.04.02 – Прикладная математика и информатика___________
код и наименование направления
________________механико-математического факультета_________________
наименование факультета, института, колледжа
____________________Савенковой Анны Олеговны_________________________
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор_____ ___________________ ___Г.В. Хромова__
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор_____ ___________________ ___В.А. Юрко____
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов, 2016 год

Введение

В данной работе рассматривается задача оценки погрешности приближённого решения уравнения I рода. Эта задача является некорректно поставленной, т.е. входит в очень широкий класс прикладных задач.

Математическая задача называется поставленной корректно, если решение её существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных. К сожалению, при решении практических задач исходные данные получаются в результате измерений и никогда не бывают известны точно, а т.к. существование и единственность решений таких задач вытекает из их физической сущности, будем понимать некорректность как невыполнение именно третьего условия (зависимость от начальных данных).

Долгое время такие задачи не исследовались ввиду отсутствия соответствующего математического аппарата. Однако в середине прошлого века некорректные задачи и так называемые уравнения 1-го рода стали предметом научного интереса многих выдающихся математиков.

Определение 0.1. Уравнение

$$Au = f$$

где A - линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X_1 в банахово пространство X_2 и такой, что A^{-1} существует, но неограничен, называется уравнением 1 рода.

Основополагающими работами в области некорректно поставленных задач являются работы А. Н. Тихонова, М. М Лаврентьева, В. К. Иванова ([3], [4], [5]). В них было положено начало теории методов решения уравнений I рода. Эти методы называются методами регуляризации и состоят из двух принципиальных моментов:

1. построение семейства линейных операторов T_h, зависящих от параметра h, действующих из пространства X_2 в пространство)X_1 и обладающих свойствами:
   (a) каждый из операторов T_h определён на всем пространстве X_2,
   (b) $\|T_h\|_{X_2 \to X_1} < \infty$ при каждом значении h,

(c) для любого $u \in X_1$

$$\|T_h A u - u\|_{X_1} \to 0 \qquad (0.1)$$

при $h \to 0$;

2. согласование параметра h с погрешностью δ $h = h(\delta)$ такое, что

$$\delta \|T_{h(\delta)}\|_{X_2 \to X_1} \to 0 \qquad (0.2)$$

при $\delta \to 0$

Таким образом, метод регуляризации – это метод приближённого решения уравнения с помощью регуляризирующего семейства при согласовании $\alpha = \alpha(\delta)$, обеспечивающем предельные соотношения (0.2). Условия же (0.1), (0.2) являются достаточными для сходимости приближённого решения к точному [1].

Пусть T_h (h - параметр) - семейство операторов, действующих в пространстве X_1 и таких, что

$$\|T_h u - u\|_{X_1} \to 0$$

при $h \to 0$ для любого $u \in X_1$, либо для любого $u \in M \subset X_1$, если заранее известно,что $u \in M$.

Рассмотрим величины:

$$\Delta(\delta, T_\alpha, \bar{u}) = \sup\{ \ \|T_\alpha f_\delta - \bar{u}\|_{X_1} : \quad \left\|f_\delta - \bar{f}\right\|_{X_2} \le \delta\},$$

$$\Delta(\delta, T_\alpha, M) = \sup\{ \|T_\alpha f_\delta - u\|_{X_1} : \quad u \in M, \quad \|f_\delta - Au\|_{X_2} \le \delta\},$$

$$\Delta_1(T_\alpha A, M) = \sup\{\|T_\alpha A u - u\|_{X_1} : \ u \in M\}.$$

Определение 0.2. Погрешностью метода $T_{\alpha(\delta)}$ в точке будем называть величину $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, \bar{u})$; погрешностью метода $T_{\alpha(\delta)}$ на классе равномерной регуляризации $M \subset X_1$ будем называть величину $\Delta(\delta, T_{\alpha(\delta)}, M)$.

При исследовании оценки погрешности для того или иного метода регуляризации (см. [1], [6]), возникает естественный вопрос: какова величина порядка по δ в этой оценке? Как правило, при ответе на этот вопрос указывается только величина порядка в оценке сверху.

Получение неулучшаемых по порядку оценок погрешности в равномерной метрике с указанием величины порядка по δ основывается на двусторонней оценке и требует специального исследования для каждого конкретного класса решений(см. [1], [6], [7], [14]).

Основные вопросы, рассматриваемые в данной работе - это нахождение оценок для Δ и нахождение конкретных формул согласования $\alpha = \alpha(\delta)$.

В первой главе "Уравнение Абеля и методы его приближенного решения"рассматривается уравнение Абеля, приводятся примеры прикладных задач, приводящих к нему. В частности это задача о таутохроне, задача о распределении масс в галактиках при известном законе вращения, задача о распределении пространственной светимости в звездных системах по наблюдаемой светимости, определение локальной излучательной способности плазмы по ее интегральной интенсивности излучения.

Во втором пункте этой главы рассматриваются приближенные методы решения этого уравнения метод квадратур, метод вычисления интеграла по квадратурной формуле, учитывающей его сингулярность и метод регуляризации Хромовой Г.В. [1).

Вторая глава "Оценка погрешностей приближенного решения уравнения Абеля"посвящена непосредственно исследованию погрешностей приближенных решений для описанных в первой главе методов, т.е. оценка погрешности методов квадратур, общая для методов регуляризации схема получения оценок погрешностей и произведена оценка погрешностей на некоторых классах. Для этого введены классы функций из пространства Соболева и описаны представления этих функций и характеристики скорости погрешности скорости аппроксимации функции на классе.

Для оценки погрешности для уравнения Абеля на таких классах решена задача Колмогорова-Никольского, приведена двусторонняя оценка норм аппроксимирующих операторов [14] и в итоге доказана теорема, дающая искомую оценку погрешности приближенного решения.

Основное содержание работы

1 Уравнение Абеля и методы его приближенного решения

1.1. Уравнение Абеля.

В 1823 г. Абель, занимаясь обобщением задачи о таутохроне (задача о таутохроне: найти кривую, скользя вдоль которой без трения тяжелая частица достигает своего самого низкого положения за одно и то же время, независимо от ее начального положения), пришел к уравнению

$$\int_a^x \frac{u(s)}{\sqrt{x-s}} ds = f(x),\ a \le x \le b, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ – заданная функция, а $u(s)$ – искомая функция. Это уравнение есть частный случай линейного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода.

Обобщением (1.1) является уравнение вида

$$\int_a^x \frac{u(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x),\ 0 < \alpha < 1 \tag{1.2}$$

которое называется обобщенным уравнением Абеля.

Часто вместо (1.2) рассматривается уравнение:

$$\int_a^x \frac{u(s)}{\Gamma(1-\alpha)(x-s)^\alpha} ds = f(x), \tag{1.3}$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ – гамма-функция.

1.2. Приближенные методы решения уравнения Абеля.

Рассмотрим интегральное уравнение Абеля (уравнение 1-ого рода с переменным нижним пределом) в форме

$$\int_x^R \frac{s}{\sqrt{s^2-x^2}} u(s) ds = f(x),\ 0 \le x \le R, \tag{1.4}$$

где $y(s)$ – искомая функция и , в частности, $R = \infty$.

Уравнение (1.4) имеет аналитическое решение

$$u(s) = -\frac{2}{\pi}\int_s^R \frac{f'(x)}{\sqrt{x^2 - s^2}}dx,\ 0 \le s \le R, \tag{1.5}$$

Однако решение (1.5) содержит производную $f'(x)$ от обычно экспериментальной, а значит, зашумленной функции $f(x)$, а задача численного дифференцирования зашумленной функции является некорректной. Кроме того, интеграл в правой части (1.5) является несобственным. Поэтому задача вычисления решения (1.5) не является тривиальной.

1.3. Метод регуляризации Хромовой.

Рассмотрим задачу решения уравнения (1.3) при $a = 0, b = 0$ в такой постановке.

Пусть правая часть нам задана её приближением в среднеквадратичной метрике, т.е.вместо $f(x)$ нам известна $f_\delta(x)$, такая что $\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$ и известно, что $u(x)$ - непрерывная функция.

Требуется по $f_\delta(x)$ и δ найти приближение к $u(x)$ в равномерной метрике. Такая постановка отражает постановки соответствующих прикладных задач. Уравнение Абеля является интегральным уравнением первого рода, которое изучается в теории некорректно поставленных задач.

Уравнение

$$Au = f \tag{1.6}$$

где A - линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства X_1 в банахово пространство X_2 и такой, что A^{-1} существует, но неограничен, является уравнением 1 рода.

Методы регуляризации состоят из двух принципиальных моментов:

1. построение семейства линейных операторов R_h, зависящих от параметра h, действующих из пространства X_2 в пространство)X_1 и обладающих свойствами:
   (a) каждый из операторов R_h определён на всем пространстве X_2,

(b) $\|R_h\|_{X_2 \to X_1} < \infty$ при каждом значении h,

(c) для любого $u \in X_1$

$$\|R_h A u - u\|_{X_1} \to 0 \tag{1.7}$$

при $h \to 0$;

2. согласование параметра h с погрешностью δ $h = h(\delta)$ такое, что

$$\delta \|R_{h(\delta)}\|_{X_2 \to X_1} \to 0 \tag{1.8}$$

при $\delta \to 0$

Далее будем рассматриваться уравнение Абеля общего вида (1.3). Для него известна формула обращения [3, с.38]

$$u \equiv \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)ds}{\Gamma(\alpha)(x-s)^\alpha}, \tag{1.9}$$

Для уравнений первого рода в случае, когда известен вид обратного оператора, Г.В. Хромовой предложен метод приближенного решения, который в общем виде выглядит так [7].

Пусть T_h (h - параметр) - семейство операторов, действующих в пространстве X_1 и таких, что

$$\|T_h u - u\|_{X_1} \to 0$$

при $h \to 0$ для любого $u \in X_1$, либо для любого $u \in M \subset X_1$, если заранее известно,что $u \in M$. Имеем: $T_h u = T_h A^{-1} A u \equiv R_h A u$, где $R_h = T_h A^{-1}$ определен на множестве значений оператора A.

Рассмотрим величину

$$\Delta(\delta, R_h, Lip_M 1) = sup \left\{ \|R_h f_\delta - u\|_{L_\infty} : u \in M, \|f_\delta - f\|_{L_2} \le 1 \right\}.$$

характеризующую оценку погрешности приближенного решения уравнения на классе M

Из теории некорректно поставленных задач известна двусторонняя оценка

$$\frac{1}{2}\varphi(\delta, R_h, M) \le \Delta(\delta, R_h, M) \le \varphi(\delta, R_h, M),$$

где $\varphi(\delta, R_h, M) = \Delta_1(R_h A, M) + \delta \left\| R_{h(\delta)} \right\|_{X_2 \to X_1}$

Известно также, что, выбрав $h = h(\delta)$ из условия

$$\Phi_(\delta, h) = C_1 \varphi_1(h) + C_2 \delta \varphi_2(h) \to \lim_h$$

получим точную по порядку оценку величины $\inf_h \Delta(\delta, R_h, M)$.

Рассматривается уравнение Абеля:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(t) dt = f(x), 0 < \alpha < 1 \tag{1.10}$$

A^{-1} - оператор, обратный к A, который, как известно, имеет вид:

$$A^{-1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t) dt.$$

Положим, что

$$R_h \varphi = S_h \varphi = \frac{1}{2h} \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} \varphi(t) dt$$

является оператором Стеклова.

$$X_1 = C_\varepsilon = C[\varepsilon, 1-\varepsilon], \varepsilon > \alpha, X_2 = L_2[0,1]$$

2 Оценка погрешностей приближенного решения уравнения Абеля

2.1. Общая схема получения оценок погрешности в методах регуляризации

В теории уравнений 1-го рода при получении оценок погрешностей приближенных решений рассматриваются величины

$$\Delta(\delta, R_h, \bar{u}) = \sup\{ \; \|R_h f_\delta - \bar{u}\|_{X_1} : \quad \left\|f_\delta - \bar{f}\right\|_{X_2} \le \delta\},$$

$$\Delta(\delta, R_h, M) = \sup\{ \|R_h f_\delta - u\|_{X_1} : \quad u \in M, \quad \|f_\delta - Au\|_{X_2} \le \delta\},$$

где M - заданный класс точных решний, а также величина

$$\Delta_1(R_h A, M) = \sup\{\|R_h A u - u\|_{X_1} : \ \ u \in M\}.$$

Определение 2.1. Погрешностью метода $R_{h(\delta)}$ в точке будем называть величину $\Delta(\delta, R_{h(\delta)}, \bar{u})$; погрешностью метода $R_{h(\delta)}$ на классе равномерной регуляризации $M \subset X_1$ будем называть величину $\Delta(\delta, T_{h(\delta)}, M)$.

В [10] предложена следующая схема получения оценок погрешностей прибилженых решений уравнений 1-го рода

1. Находится представление

$$\Delta(\delta, R_h, M) = \varphi_1(h) + \psi_1(h) \tag{2.1}$$

где $\psi_1(h) = o(\varphi_1(h))$ при $h \to 0$

либо двусторонняя оценка

$$C_2\varphi_1(h) + \tilde{\psi}_1(h) \le \Delta(\delta, R_h, M) \le C_1\varphi_1(h) + \psi_1(h) \tag{2.2}$$

где $\tilde{\psi}_1(h), \psi_1(h)$ суть $o(\varphi_1(h))$.

2. Находится аналогичное представление для $\|R_h\|_{X_2 \to X_1}$:

$$\|R_h\|_{X_2 \to X_1} = \varphi_2(h) + \psi_2(h) \tag{2.3}$$

либо оценка

$$C_3\varphi_2(h) + \tilde{\psi}_2(h) \le \|R_h\|_{X_2 \to X_1} \le C_4\varphi_2(h) + \psi_2(h) \tag{2.4}$$

где $\tilde{\psi}_2(h), \psi_2(h)$ суть $o(\varphi_2(h))$.

3. Составляется функция

$$\Phi(\delta, h) = \varphi_1(h) + \delta\varphi_2(h)$$

и находится $h = h(\delta)$ из условия $\Phi(\delta, h) \to \inf_h$

Тем самым определяется метод $R_{h(\delta)}$

4. Найдем согласование $h = h(\delta)$. В результате получается оценка погрешности, точная по порядку δ и не улучшаемая по порядку δ для данного метода регуляризации, поскольку $\Delta(\delta, R_{h(\delta)}, M) \simeq \inf_h \Delta(\delta, R_h, M)$.

2.2. Оценка погрешности для уравнений Абеля на классах M_2^r

Решение задачи Колмогорова-Никольского

Рассмотрим величину $\Delta_1(R_h A, M_2^1)$. В нашем случае $R_h a = \tilde{S}_h$, значит $\Delta_1(R_h A, M_2^1) = \Delta_1(\tilde{S}_h, M_2^1)$. Таким образом мы пришли к решению задачи Колмогорова-Никольского для простого семейства операторов $\tilde{S}_h$

Теорема 2.2. Имеет место равенство, асимптотическое по h при $h \to 0$:

$$\Delta_1(R_h A, M) = (\frac{h}{3})^{\frac{1}{2}} + O(h^{\frac{3}{2}})$$

Двусторонняя оценка норм операторов R_h

Рассмотрим операторы $R_h = \tilde{S}_h A$, где

$$\tilde{S}_h\varphi = \begin{cases} \frac{1}{h}\int_0^{h-x}\varphi(t)dt + \frac{1}{2h}\int_{h-x}^{h+x}\varphi(t)dt, x \in [0,h], \\ \\ S_h\varphi, x \in [h, 1-h], \\ \\ \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{2-h-x}\varphi(t)dt + \frac{1}{h}\int_{2-h-x}^{1}\varphi(t)dt, x \in [1-h, 1], \end{cases}$$

Теорема 2.3. Для операторов R_h, при $0 < \alpha < 1/2$ справедлива двусторонняя оценка:

$$C_2(\alpha)h^{-\frac{2\alpha+1}{2}} \le \|R_h\|_{L_2\to} \le \sqrt{2}C_1(\alpha)h^{-\frac{2\alpha+1}{2}}, \qquad (2.5)$$

где C_1, C_2 - известны.

2.3. Оценка погрешности приближенного решения уравнения Абеля на классе M_2^1

Теорема 2.4. Справедлива двусторонняя оценка, точная по порядку δ

$$C_2(h)\delta^{\frac{1}{2(1+h)}} - \psi(\delta) \leq \Delta(\delta, R_{h(\delta)}M_2^1) \leq C_1(\alpha)\delta^{\frac{1}{2(1+h)}} + \psi(\delta) \tag{2.6}$$

где

$$h(\delta) = C(\alpha)\delta^{\frac{1}{1+\alpha}} \tag{2.7}$$

$$C(\alpha) = (3^{-1/2}\tilde{C}_1(\alpha)(2\alpha+1))^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

$$C_1(\alpha) = 3^{-1/2}C^{1/2}(\alpha) + \tilde{C}_1(\alpha)(C(\alpha))^{-(\frac{1}{2}+\alpha)}$$

$$C_2(\alpha) = \frac{1}{2}\big(3^{-1/2}C^{1/2}(\alpha) + \tilde{C}_2(\alpha)(C(\alpha))^{-(\frac{1}{2}+\alpha)}\big)$$

$$\psi(\delta) = O(\delta^{\frac{3}{2(1+\alpha)}})$$

Заключение

В данной работе была проведена оценка погрешностей в равномерной метрике приближенных решений для интегрального уравнения Абеля. Для решения был применен метод регуляризации Хромовой Г.В. на базе оператора Стеклова.

Для получения оценок погрешностей был рассмотрен класс непрерывных функций, являющийся шаром в пространстве Соболева и общая схема получения неулучшаемых оценок погршности к приближенному решению. Следуя этой схеме, получены следующие результаты:

1. Найдена скорость аппроксимации точного решения на данном классе
2. Приведена формула для согласования параметра регуляризации и погрешности в правой части
3. Получены неулучшаемые оценки погрешности

Полученные результаты могут непосредственно использоваться при решении прикладных задач.