

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С РАЗРЫВНЫМ
ЯДРОМ И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ
ФУНКЦИЯМ ЭТИХ ОПЕРАТОРОВ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Механико-математического факультета
Губаревой Натальи Валентиновны

Научный руководитель

к.ф.м.-н., доцент

дата, подпись

В.В. Корнев

Зав. кафедрой

д.ф.м.-н., профессор

дата, подпись

А. П. Хромов

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются некоторые вопросы спектральной теории линейных интегральных уравнений.

Актуальность. Современные взгляды на фундаментальные законы природы часто излагаются с помощью интегральных уравнений, решение которых связано с изучением спектральных свойств интегральных операторов. Спектральный анализ этих операторов включает в себя вопросы нахождения собственных значений, собственных и присоединенных функций (СПФ), изучение сходимости их асимптотики, разложений произвольной функции в ряд по СПФ и по известным системам функций, теоремы равносходимости и т.д.

В 80-90-х годах XX века д.ф.-м.н., профессор А.П. Хромов нашел новый класс интегральных операторов, с интегральными спектральными свойствами и вместе со своими учениками начал их систематическое исследование [1]-[5]. Фундаментальной работой является [6], в которой при весьма общих предположениях получены условия, при которых разложения по собственным функциям этих операторов ведут себя так же, как тригонометрические ряды Фурье. Однако эти условия трудно проверяются. В данной магистерской работе изучается более узкий класс интегральных операторов, для которого удастся получить более конкретные условия, при которых имеет место теорема равносходимости.

Цель исследования заключается в доказательстве свойств резольвенты интегрального оператора применительно к интегральным уравнениям второго рода, анализе свойств проекторов и доказательстве наиболее важных из них применительно к проекторам Рисса, доказательстве возможности представления частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом, формулировке и доказательстве теорем равносходимости для интегрального

оператора с разрывным ядром.

Структура и объем. Магистерская работа содержит 70 стр. машинописного текста. Состоит из введения, трех глав, заключения. Список использованных источников включает 24 наименования.

Методы исследования – включают в себя методы:

- теории обыкновенных дифференциальных уравнений;
- интегральных уравнений;
- функционального анализа
- спектральной теории операторов.

Научная новизна. Исследуются спектральные свойства нового класса интегральных операторов, ядра которых имеют разрывы на ломанных. Для интегрального оператора, ядро которого имеет скачок на диагонали основного квадрата, найдены просто проверяемые необходимые и достаточные условия, при которых имеет место равносходимость разложения по собственным функциям этого оператора и тригонометрических рядов Фурье. Эти результаты представляют определенный научный интерес.

На защиту выносятся теорема о резольvente конечномерного возмущения интегрального оператора, доказательства свойств проектора Рисса, новое необходимое и достаточное условие обратимости интегрального оператора со скачком ядра на диагонали, условие равносходимости разложений по собственным функциям этого оператора и тригонометрических рядов Фурье.

По теме магистерской работы сделан один доклад на конференции: Губарева Н.В. Простейшие модели вязко-упругих тел. Модель Максвелла [Текст] / Губарева Н.В. // Сборник материалов XVI междунар. науч.-техн. конф. "Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности г. Тула, 30 июня-3 июля 2015 г. / ТулГУ. - Тула, 2015. -

Основное содержание работы

В работе анализируются, на основе аналитических оператор функций, свойства резольвенты интегрального оператора применительно к интегральным уравнениям второго рода. Рассматриваются вопросы разложения по собственным функциям интегрального оператора, в частности, доказываются теоремы о свойствах проекторов Рисса, о возможности представления частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом, доказываются теорема равносходимости для интегрального оператора с разрывным ядром.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректной математической постановкой рассматриваемых задач, тщательным доказательством положений теорем, сравнением полученных результатов с аналогичными исследованиями других авторов.

В **главе 1** “Основные понятия и определения теории интегральных операторов” вводятся и анализируются основные понятия, определения и теоремы теории интегральных операторов, таких как сопряженные операторы, вполне непрерывные операторы, спектр линейного оператора, некоторые сведения из теории интегральных уравнений. Приведенные здесь сведения необходимы для теоретических исследований, выполненных во второй и третьей главах.

В **главе 2** „Резольвента интегрального оператора и её свойства“ вводятся понятия мероморфной оператор-функции, её разложение в ряд Лорана. Показано, что мероморфная оператор-функция в каждой конечной части плоскости может содержать только конечное число полюсов.

Затем рассматривается уравнение Фредгольма второго рода

$$y = f + \lambda Ay, \quad (1)$$

где A –интегральный оператор Фредгольма в $L_2(0, 1)$ с ядром $A(x, t)$, A –вполне непрерывный оператор. Если оператор $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1}$ ограничен и определен во всем пространстве, тогда решение можно записать в виде

$$y = (E - \lambda A)^{-1} f. \quad (2)$$

Вводится понятие $R_\lambda(A)$ резольвенты Фредгольма интегрального оператора, определенной на множестве регулярных точек

$$R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1} A. \quad (3)$$

С учетом (1), (2) решение интегрального уравнения (1) записывается в виде

$$y = f + \lambda R_\lambda(A) f. \quad (4)$$

Таким образом, возможность получения решения интегрального уравнения (1) в виде (3) связана со свойствами резольвенты Фредгольма. Последующие разделы второй главы посвящены изучению этих свойств.

В качестве иллюстрирующих примеров рассмотрен метод последовательных приближений решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода. Приводится доказательство теоремы о том, что метод сходится только при малых значениях λ , т.е. не для всех λ .

Рассматривается также метод вырожденных ядер, на примере интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Особое внимание уделено интегральному оператору с конечномерным возмущением.

$$Af = Mf + \sum_{k=1}^m (f, v_k)g_k, \quad (5)$$

где A и M — операторы Гильберта – Шмидта в пространстве $L_2[0, 1]$ $\{v_k(t)\}$ и $\{g_k(x)\}$ — линейно независимые системы элементов. Для него справедлива теорема:

Теорема 1. Если $R_\lambda(A)$, $R_\lambda(M)$ существуют и $\Delta(\lambda) \neq 0$, то для оператора (5) имеет место формула

$$R_\lambda(A)f = R_\lambda(M)f + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^m g_k(\lambda) \sum_{j=1}^m ((E - \lambda M)^{-1}f, v_j)\Delta_{jk}(\lambda),$$

где $\Delta(\lambda) = \det \|\delta_{jk} - \lambda(g_k(\lambda), v_j)\|_1^m$, $g_k(\lambda) = (E - \lambda M)^{-1}g_k$, δ_{kj} — символ Кронекера, $\Delta_{jk}(\lambda)$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя $\Delta(\lambda)$.

Эта теорема имеет два следствия, которые используются в дальнейшем.

Следствие 1.1 Если $\Delta(\lambda) = 0$, то λ — характеристическое значение.

Следствие 1.2 Если λ — характеристическое значение, то $\Delta(\lambda) = 0$.

Далее следует две итоговые теоремы, доказательство которых базируется на теореме 1 и её свойствах.

Теорема 2. Если A — оператор Гильберта – Шмидта, то резольвента $R_\lambda(A)$ есть мероморфная оператор-функция параметра λ .

Теорема 3. Если λ_0 — характеристическое значение, то в окрестности λ_0 разложение $R_\lambda(A)f$ в ряд Лорана имеет вид

$$R_\lambda(A)f = \frac{A_{-n}f}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \frac{A_{-n+1}f}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{-1}f}{\lambda - \lambda_0} + A_0f + (\lambda - \lambda_0)A_1f + \dots,$$

причем A_{-n}, \dots, A_{-1} — конечномерные операторы.

На основе теоремы 4. (тождество Гильберта) формулируются следующие свойства резольвенты:

Следствие 4.1. Справедливо равенство $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

Следствие 4.2. Если B — решение уравнения

$$B = R_\mu(A) + (\lambda - \mu)BR_\mu(A),$$

то $B = R_\lambda(A)$.

Третья глава „Сходимость разложений по собственным функциям интегрального оператора“ содержит основные результаты.

В первом параграфе этой главы изучены и доказаны наиболее важные свойства проекторов Рисса, которые играют большую роль в вопросах спектральной теории операторов. Получено представление частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом.

Пусть A интегральный оператор

$$Af = \int_0^1 A(x, t)f(t)dt, \quad x \in [0, 1],$$

действующий в $L_2[0, 1]$. Ядро $A(x, t)$ есть комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию Гильберта – Шмидта.

Обозначим через $R_\lambda(A)$ резольвенту Фредгольма оператора A , т. е. $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$, где E — единичный оператор и λ комплексный параметр. Пусть γ простой замкнутый кусочно-гладкий контур, не проходящий через характеристические числа оператора A . Интеграл

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\lambda(A)d\lambda$$

носит название *проектора Рисса*.

В теоремах 5, 6, 7 приведено доказательство наиболее важных свойств проекторов Рисса.

Теорема 5. Имеет место равенство $P^2 = P$.

Теорема 6. Проектор P перестановочен с любым ограниченным оператором A , т.е. справедливо равенство $AP = PA$.

Теорема 7. Для любых двух непересекающихся замкнутых контуров γ_1 и γ_2 , не проходящих через характеристические числа оператора A имеет место равенство $P_1 P_2 = 0$, где $P_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R_\lambda d\lambda$.

Пусть теперь $\gamma = \{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$, где λ_0 — характеристическое значение оператора A , а γ — контур, не содержащий других характеристических чисел.

Обозначим $P_{\lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_\lambda d\lambda$ и рассмотрим многообразие $N_{\lambda_0} = P_{\lambda_0} L_2$, N_{λ_0} — конечномерное пространство.

Лемма 1. Если $f \in N_{\lambda_0}$, то и $Af \in N_{\lambda_0}$.

Это лемма показывает, что оператор A рассматривается на конечномерном пространстве N_{λ_0} .

Лемма 2. Пусть $A_{N_{\lambda_0}}$ есть A на N_{λ_0} . Тогда $A_{N_{\lambda_0}}$ — конечномерный оператор, имеющий только одно характеристическое значение λ_0 .

В развитие этого положения доказываются следующие леммы

Лемма 3. Справедлива формула

$$(E - \mu A)^s R_\lambda = (E - \mu A)^{s-1} A + (\lambda - \mu)(E - \mu A)^{s-2} A^2 + \dots + (\lambda - \mu)^{s-1} A^s + (\lambda - \mu)^s R_\lambda A^s.$$

Лемма 4. Если $(E - \lambda_0 A)^s f = 0$, то

$$R_\lambda f = -\frac{f}{\lambda - \lambda_0} - \frac{\lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} f_1 - \frac{\lambda \lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^3} f_2 - \dots - \frac{\lambda^{s-1} \lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^{s+1}} f_s,$$

где $f_j = (E - \lambda_0 A) f_{j-1}$ и $f_0 = f$.

Теорема 8. Имеет место $N_{\lambda_0} = M_{\lambda_0}$.

Линейно независимая система биортогональных элементов строиться на основе следующих теорем и утверждений.

Определение. Пусть H_1 и H_2 — два подпространства, причем $H_2 \subset H_1$. Система элементов f_1, \dots, f_s из H_1 называется *линейно независимой по модулю H_2* , если из того, что $\sum_{i=1}^s \alpha_i f_i \in H_2$ следует, что $\alpha_i = 0$.

Рассмотрим множества:

$$M_j = \{f \mid (E - \lambda_0 A)^j f = 0\}.$$

Тогда очевидно, что $M_j \subset M_{j+1}$ и все M_j , начиная с некоторого, совпадают и равны M_{λ_0} . Так как M_{λ_0} — конечномерно, то конечномерны и все M_j .

Пусть s — минимальный номер, когда $M_s = M_{\lambda_0}$. Обозначим через $f_{11}, \dots, f_{1\nu_1}$ систему элементов из M_s , являющейся максимально линейно независимой по модулю M_{s-1} .

Лемма 5. Система элементов $(E - \lambda_0 A)f_{11}, \dots, (E - \lambda_0 A)f_{1\nu_1}$ линейно независима по модулю M_{s-2} .

Обозначим через $\{\varphi_j\}$ элементы этой системы $\varphi_1 = (E - \lambda_0 A)^{s-1} f_{11}$, $\varphi_2 = (E - \lambda_0 A)^{s-2} f_{11}, \dots, \varphi_s = f_{11}, \varphi_{s+1} = (E - \lambda_0 A)^{s-1} f_{12}, \varphi_{s+2} = (E - \lambda_0 A)^{s-2} f_{12}, \dots$. Тогда получим

$$(E - \lambda_0 A)\varphi_k = \varepsilon_k \varphi_{k-1}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (6)$$

где ε_k принимают значения 0 или 1, при $\varepsilon_1 = 0$.

Определение. Система $\{\varphi_k\}$, удовлетворяющая (6), называется *системой собственных и присоединенных функций* (где $\varepsilon_k = 0$, то φ_k — собственная функция, если $\varepsilon_k = 1$, то φ_k — присоединенная функция).

Определение. Пусть $\{u_j\}$ — некоторая линейно независимая система из $L_2[0, 1]$. Система $\{v_j\} \in L_2[0, 1]$ называется *биортогональной* к $\{u_j\}$, если $(u_j, v_k) = \delta_{jk}$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Лемма 6. Имеет место следующая формула:

$$P_{\lambda_0} f = \sum_{j=1}^p (f, \psi_j) \varphi_j,$$

где $\{\psi_j\}_1^p$ — система, биортогональная к $\{\varphi_j\}_1^p$.

Лемма 7. Если ψ — с.п.ф. сопряженного оператора, соответствующего характеристическому значению $\bar{\lambda}_1$, а φ — с.п.ф. исходного оператора для характеристического значения λ_0 и $\lambda_1 \neq \lambda_0$, то $(\psi, \varphi) = 0$.

Затем доказывается, что $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\lambda}(A) f d\lambda$ есть сумма членов ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям (СПФ) оператора A , соответствующим характеристическим значениям λ_n , попавшим внутрь γ . В частности,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{\lambda}(A) f d\lambda = S_r(f, x),$$

где $S_r(f, x)$ частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A , для тех λ_n , для которых $|\lambda_n| < r$.

Из лемм 6 и 7 получаем

Теорема 9. Имеет место формула

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_{\lambda} f d\lambda,$$

где $S_r(f, x) = \sum_{|\lambda_k| < r} (f, \psi_k) \varphi_k$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — системы всех с.п.ф. для тех λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система биортогональная всей системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Нумерация $\{\varphi_k\}$ идет в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учетом кратности (т.е. каждому φ_k соответствует теперь только одно λ_k , или иначе, одно и то же λ_k повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных и присоединенных функций).

Утверждение рассмотренной теоремы дает важное представление частичной суммы $S_r(f, x)$ ряда Фурье по с.п.ф. через интеграл по контуру от резольвенты. Это представление играет значительную роль в спектральной теории операторов.

Полученное в теореме 9 выражение $S_r(f, x)$ дает широко распространенный метод исследования сходимости $S_r(f, x)$ при $r \rightarrow \infty$, носящий на-

звание метода расширяющихся контуров Коши– Пуанкаре. Успех применения данного метода достигается за счет получаемой информации о R_λ при больших $|\lambda|$ (асимптотики или оценок R_λ).

Во втором параграфе для интегральных операторов со скачком ядра на диагонали найдены необходимые и достаточные условия их обратимости. Установлено условие, обеспечивающее равномерную сходимость рядов Фурье по собственным функциям этих операторов и тригонометрических рядов Фурье.

Рассмотрим в пространстве $L[0, 1]$ интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A_1(1-x, t)f(t)dt + \int_{1-x}^1 A_2(1-x, t)f(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

где функции $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$ непрерывны вместе с частными производными до 2-го порядка включительно в треугольниках $x \geq t$ и $x \leq t$ соответственно, причем выполняется тождество

$$A_1(x, x) - A_2(x, x) \equiv 1.$$

Данный оператор является частным случаем операторов, рассмотренных в [6]. Вид (7) оператора A позволяет получить более конкретные результаты по сравнению с резольвентами полученными [6].

Введем операторы

$$Bf = \int_0^x A_1(x, t)f(t)dt + \int_x^1 A_2(x, t)f(t)dt,$$

$$B_x f = \int_0^x \frac{\partial A_1(x, t)}{\partial x} f(t)dt + \int_x^1 \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} f(t)dt.$$

Заметим

$$\frac{d}{dx} Bf = f(x) + B_x f.$$

Теорема 10. Для обратимости оператора A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

- 1) число -1 не является собственным значением оператора B_x ;
- 2) число -1 является собственным значением оператора B_x , его геометрическая кратность равна 1 и $B\varphi \neq 0$, где $\varphi(x)$ — соответствующая собственная функция оператора B_x .

Теорема 11. Пусть операторы A и A^* обратимы. Тогда при выполнении условия

$$\overline{A_1(0, t) \pm iA_2(1, t)} \notin R_{A^*}. \quad (8)$$

$\notin (R_{A^*}$ — область значений интегрального оператора A^* , ядро которого сопряжено с ядром оператора A) для любой функции $f \in L[0, 1]$ и любого $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{\delta \leq x \leq 1-\delta} |S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)| = 0$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A , соответствующим характеристическим значениям, модуль которых меньше r ; $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{i2k\pi x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k , для которых $|2k\pi| < r$.

Замечание. Условие обратимости A^* является необходимым для того, чтобы равносходимость имела место, так как оно равносильно условию, что R_A всюду плотно в $L[0, 1]$. Оператор A^* относится к классу (7) и его можно исследовать с помощью теоремы 10. Что касается условия (8), его проверка сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. В частном случае, когда $c_1A_1(1, t) + c_2A_2(0, t) \equiv 0$, проверка регулярности тривиальна, так как в этом случае $a = c_1, b = c_2, \psi(t) \equiv 0$ и A^* обратим.

Основные источники, используемые в работе:

1. Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат сб 1981 Т. 114(156). №3. С. 378-405

2. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях [Текст] / А.П. Хромов // Матем. заметки. 1998. - Т. 64, № 6. - С. 932-942.
3. Хромов А.П., “Конечномерные возмущения вольтерровых операторов”, Функциональный анализ, СМФН, 10, МАИ, М., 2004, 3–163
4. Корнев В.В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.
5. Корнев В.В. О сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с разрывным ядром. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 1-2. С. 59-62.
6. Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Матем. сб. 2006. Т. 197, вып. 11. С. 115–142.

Заключение

В магистерской работе выполнены следующие исследования:

- введены и проанализированы основные понятия, определения и теоремы теории интегральных операторов, такие как сопряженные операторы, вполне непрерывные операторы, спектр линейного оператора, некоторые сведения из теории интегральных уравнений;
- рассмотрены методы решения интегральных уравнений второго рода:
- метод последовательных приближений и метод вырожденных ядер. Для их решения используется понятие резольвенты Фредгольма интегрального оператора;
- рассмотрены и доказаны ряд свойств резольвенты;
- рассмотрены проекторы Рисса, имеющие важное значение в спектральной теории операторов, их свойства;

- доказана теорема о представлении частичной суммы $S_r(f, x)$ ряда Фурье по с.п.ф. через интеграл по контуру от резольвенты;
- для интегральных операторов со скачком ядра на диагонали простые найдены необходимые и достаточные условия их обратимости;
- установлены условия обеспечивающие равномерность рядов Фурье по собственным функциям этих операторов и тригонометрических рядов Фурье.