Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

# РЕЗОЛЬВЕНТНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

## АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Приходской Ксении Викторовны

Научный руководитель
д.ф.м.-н., профессор ____________________ А. П. Хромов
дата, подпись

Зав. кафедрой
д.ф.м.-н., профессор ____________________ А. П. Хромов
дата, подпись

Саратов 2016

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Данная работа посвящена проблеме обоснования метода Фурье в смешанных задачах для уравнений с частными производными. Рассматриваются два новых подхода, по сравнению со стандартной схемой обоснования. Первый подход, предложенный В.А.Чернятиным, состоит в отказе от почленного дифференцирования формального решения смешанной задачи. Идея второго подхода, вытекающая из исследований А.Н. Крылова и В.А. Чернятина, основана на методе контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного соответствующей спектральной задачей. Данный резольвентный подход, предложенный А.П. Хромовым, реализуется в смешанной задаче для волнового уравнения.

Метод Фурье используется при решении задач математической физики, интерес к которым постоянно поддерживается их разнообразными и многочисленными приложениями. Именно поэтому нахождение условий разрешимости подобных задач является актуальным вопросом на сегодняшний день.

**Цель работы.** Необходимо получить классическое решение данной смешанной задачи, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.

**Структура работы.** Магистерская работа содержит 52 страницы машинописного текста и состоит из введения, двух глав (Методология подхода В.А. Чернятина к обоснованию метода Фурье, Резольвентный подход для волнового уравнения) и списка использованных источников (21 наименование).

**Научная новизна.** В магистерской работе излагается новый научный подход к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения, который позволяет минимизировать требования на исходные данные. Приведены строгие математические доказательства. Данные результаты имеют высокую научную значимость.

**Положения, выносимые на защиту.** Подробно изложены два подхода к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения и дана их сравнительная характеристика.

# Основное содержание работы

Во **Введении** обозначено направление исследований, приведены некоторые утверждения, используемые в дальнейшем, и основные результаты.

В **Главе I** вводится в рассмотрение и исследуется следующая смешанная задача для однородного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x)u(x,t) = 0, \tag{1}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in C[0,\pi], \tag{2}$$

относительно искомой функции $u(x,t)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3}$$

и начальным данным Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{4}$$

Основная цель: найти функцию

$$u(x,t) \in C^2(\overline{Q}), \tag{5}$$

удовлетворяющую в обычном смысле уравнению (1) в открытом прямоугольнике Q, а также граничным (3) и начальным (4) условиям.

В параграфе 1.1 приводятся некоторые соображения в пользу выбора класса допустимых решений в виде (5). Затем показывается, что из существования решения $u(x,t) \in C^2(Q) \bigcap C(\overline{Q})$ смешанной задачи (1), (3), (4) следует его принадлежность классу (5).

В параграфе 1.2 определяются необходимые условия разрешимости задачи (1) – (5). А именно

$$\varphi(x) \in C_0^2[0,\pi], \tag{6}$$

$$\psi(x) \in C_0^1[0,\pi], \tag{7}$$

$$\varphi''(0) = \varphi''(\pi), \tag{8}$$

и условие (2) являются минимальными требованиями к исходным данным смешанной задачи (1)-(5). Ставится вопрос об их достаточности для существования искомого решения $u(x,t)$.

Далее по тексту формулируется теорема о разрешимости смешанной задачи (1)-(5).

**Теорема 1. 3.** *Решение $u(x,t)$ смешанной задачи (1)-(5) существует и единственно тогда и только тогда, когда начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям (6)-(8). При этом оно дается функциональным рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\Phi_n\cos\omega_n t + \frac{\Psi_n}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) y_n(x). \tag{9}$$

*Здесь $\omega_n^2$ и $y_n$- собственные значения и соответствующие им нормированные собственные функции системы Штурма-Лиувилля*

$-y''(x) + q(x)y(x) = \omega^2 y(x),$

$y(0) = y(\pi) = 0,$

$q(x) \in C[0,\pi]$*- вещественный потенциал, а $\Phi_n$ и $\Psi_n$- коэффициенты Фурье начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по полной ортонормированной в $L_2(0,\pi)$ системе $\{y_n(x)\}_1^\infty$, определяемые в соответствии с формулой:*

$\int\limits_0^\pi f(x)y_n(x)\,dx.$

В параграфе 1.3 исследуются свойства гладкости функционального ряда (9), предполагая выполненными условия (2) и (6)-(8). Вначале доказывается равномерная сходимость формального ряда (9) на замыкании $\overline{Q}$. Потом сумма ряда (9) обозначается через $S(x,t)$. Ниже по тексту будет установлено, что при выполнении условий (2), (6)-(8) следует что $S(x,t) \in C^2(\overline{Q})$.

Ряд (9) представляется в виде двух составляющих: регулярной и сингулярной:

$$S(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + \sum_{i=1}^{3} S_i(x,t), \quad (10)$$

где

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^2} \cos(nt) \sin(nx), \quad (11)$$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \sin(nt) \sin(nx), \quad (12)$$

$$S_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\theta_n}{n^2} (\cos \omega_n t - \cos(nt)) + \frac{\psi_n}{n} (\sin \omega_n t - \sin(nt)) \right] \sin(nx), \quad (13)$$

$$S_2(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\theta_n}{n^2} \cos \omega_n t + \frac{\psi_n}{n} \sin \omega_n t \right) h_n(x), \quad (14)$$

$$S_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^3} (\cos \omega_n t + A_n \sin \omega_n t) y_n(x), \quad (15)$$

$\theta_n = n^2 \varphi_n + z_n$,

$$\theta_n = \gamma_n. \quad (16)$$

Величина $\theta_n$ является синус-коэффициентом Фурье функции $\theta(x) = z(x) - \varphi''(x) \in C_0[0,\pi]$. Оказывается, от свойств функции $\theta(x)$ полностью зависит вопрос разрешимости задачи (1)-(5).

В параграфе 1.4 исследуется гладкость второго порядка функций $S_i(x,t)$.

В параграфе 1.5 проводится суммирование функциональных рядов (11) и (12), представляющих собой сингулярную составляющую суммы из (10).

В параграфе 1.6 доказывается что сумма $S(x,t)$ ряда (9) является формальным решением смешанной задачи (1)-(5), а также, что при выполнении условий (6)-(8) формальное решение $S(x,t)$ удовлетворяет условиям $U_i S(0,t) + V_i S(\pi,t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$ и $S(x,t) \in B(\overline{Q})$ существования искомого классического решения $u(x,t)$.

В **Главе II** дается дальнейшее развитие подхода В.А. Чернятина путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье.

Вводится в рассмотрение следующая задача:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \tag{17}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), {u'}_t(x,0) = 0. \tag{19}$$

Считаем, что $q(x) \in C[0,1]$ и комплекснозначная, и

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0. \tag{20}$$

В параграфе 2.1 проводится преобразование формального решения по методу Фурье задачи (17)-(19).

Метод Фурье связан со спектральной задачей для оператора $L$:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), \qquad y(0) = y(1) = 0.$$

**Теорема 2.1.** *Собственные значения оператора $L$, достаточно большие по модулю, простые, и для них имеют место асимптотические формулы:* $\lambda_n = \rho_n^2, \rho_n = \pi n + O(1/n)$, $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$.

Далее по тексту вводятся обозначения: $\gamma_n = \{\rho | \, |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$

и достаточно мало, а $n \geq n_0$ и $n_0$ таково, что при всех $n \geq n_0$ внутрь и на границу $\gamma_n$ попадает лишь по одному из $\rho_n$. Пусть $\tilde{\gamma}_n$ образ $\gamma_n$ в $\lambda$-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re}\rho \geq 0$). Обозначим через $R_\lambda$ резольвенту оператора $L$, т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где $E$ - единичный оператор, $\lambda$ - спектральный параметр. Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (17)–(19) представимо в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda + \sum_{n\geq n_0}(\varphi,\psi_n)\varphi_n(x)\cos\rho_n t, \tag{21}$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения меньшие по модулю $r$ имеют номера меньшие $n_0$, на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ собственная функция оператора $L$ для собственного значения $\lambda_n$, система $\{\psi_n(x)\}$ биортогональна системе $\{\varphi_n(x)\}$. Представим (21) в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda, \tag{22}$$

и произведем дальнейшее преобразование полученного ряда.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\mu_0$ не является собственным значением оператора $L$ и таково, что $|\mu_0| > r$ и $\mu_0$ не находится внутри и на границе $\tilde{\gamma}_n$ ни при каком $n \geq n_0$. Тогда*

$$\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda = \int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda - \mu_0}(R_\lambda g)\cos\rho t d\lambda, \tag{23}$$

*где $g = (L - \mu_0 E)\varphi$.*

**Теорема 2.2.** *Для формального решения $u(x,t)$ имеет место формула*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{24}$$

*где*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0}\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0}\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ - *резольвента оператора* $L_0$, *который есть оператор* $L$ *при* $q(x) \equiv 0$ *(считаем, что вышеприведенные требования на* $\mu_0$ *выполняются и для оператора* $L_0$*).*

В параграфе 2.2 получаем точную формулу для $u_0(x,t)$.

**Лемма 2.3.** *Имеет место формула:*

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda^0\varphi_1)\cos\rho t d\lambda, \qquad (25)$$

*где* $\varphi_1 = R_\lambda^0 g$.

Для дальнейшего потребуется точная формула для резольвенты $R_\lambda$. Обозначим через $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$ решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0,\rho) = 1, \qquad {z'}_1(0,\rho) = 0, \qquad z_2(0,\rho) = 0, \qquad {z'}_2(0,\rho) = 1.$$

**Теорема 2.3.** *Для резольвенты* $R_\lambda$ *имеет место формула:*

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x), \qquad (26)$$

*где* $v(x,\rho) = \frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$, $(M_\rho f)(x) = \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$, $M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho)\end{vmatrix}$.

В параграфе 2.3 проводится исследование ряда $u_2(x,t)$. Теорема 2.3 приводит к следующему представлению для $u_2(x,t)$:

$$u_2(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=n_0}^{\infty}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]\cos\rho t d\lambda.$$

Ниже по тексту приводится несколько хорошо известных фактов об асимптотике $z_1(x,\rho)$ и $z_2(x,\rho)$, требующихся для дальнейших доказательств. Положим

$$a_n(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} \frac{2\rho\cos\rho t}{\lambda-\mu_0}\left[v(x,\rho)(g,z_2) - v^0(x,\rho)(g,z_2^0)\right]d\rho.$$

**Лемма 2.9.** *Ряды* $\sum a^{(j)}_{n,x^j}(x,t)$, $\sum a^{(j)}_{n,t^j}(x,t)$ $(j=0,1,2)$ *сходятся абсолютно и равномерно по* $x\in[0,1]$ *и* $t\in[-T,T]$, *где* $T>0$ *любое фиксированное число.*

Из того, что $u_2(x,t) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n(x,t)$, следует

**Лемма 2.10.** *Ряд* $u_2(x,t)$ *допускает почленное дифференцирование дважды по* $x$ *и* $t$ *при* $x\in[0,1]$ *и* $t\in(-\infty,\infty)$.

Основные результаты параграфа 2.4 и всей второй главы сформулированы в теореме 2.7.

**Теорема 2.7.** *Формальное решение (21) есть классическое решение задачи (17)–(19) при минимальных условиях (20) на* $\varphi(x)$.

**Основные источники, используемые в работе:**


Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. - 112 с;

Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. - 368 с;

Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015. Т. 55, № 2. С. 229–241.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены и подробно изложены новые подходы к обоснованию метода Фурье в смешанной задаче для волнового уравнения в случае условий закрепления.

Основным результатом работы является получение необходимых и достаточных условий существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения, а также нахождение классического решения одномерного волнового уравнения путем привлечения метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье.