Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Механико-математического факультета
Чувашкина Валерия Константиновича

Научный руководитель
д.ф.м.-н., профессор ______________ А. П. Хромов
дата, подпись

Зав. кафедрой
д.ф.м.-н., профессор ______________ А. П. Хромов
дата, подпись

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Данная работа посвящена решению смешанной задачи для простейшего гиперболического уравнения с инволюцией методом Фурье с использованием приёмов, позволяющих избежать почленного дифференцирования формального решения и получить неулучшаемые достаточные условия существования классического решения. Данный подход к обоснованию метода Фурье базируется на идеях А.Н. Крылова и В.А. Чернятина о выделении структурных особенностей получаемого формального решения.

Метод Фурье используется при решении задач математической физики, которые, в свою очередь, имеют необходимые и достаточные условия, накладываемые на начальные данные. Необходимые условия получаются из самой постановки задачи, то есть из физики процесса, в то время как достаточные условия получаются в процессе обоснования метода Фурье (в процессе доказательства, что полученный ряд, называемый формальным решением, сходится к непрерывной функции, которая удовлетворяет уравнению, краевым и начальным условиям смешанной задачи). В процессе обоснования метода Фурье, зачастую возникают требования на начальные условия, обусловленные легитимностью тех или иных математических преобразований, то есть математикой. Эти условия вполне могут быть завышенными (это зависит от способа обоснования), а потому нахождение минимальных достаточных условий на начальные данные является актуальным вопросом на сегодняшний день.

Цель работы. Необходимо получить классическое решение данной смешанной задачи и минимальные, неулучшаемые достаточные условия на начальные данные.

Структура работы. Магистерская работа содержит 57 страниц машинописного текста и состоит из введения, двух глав (Различные обоснования метода Фурье и Смешанная задача для гиперболического уравнения с инволюцией), заключения и списка использованных источников (21 наименование).

Научная новизна. В магистерской работе исследуется новая смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка, в виду присутствия инволюции. Задача решена и получены минимальные достаточные условия существования классического решения. Приведены строгие математические доказательства. Данные результаты имеют высокую научную значимость.

Положения, выносимые на защиту. Исследован резольвентный подход к обоснованию метода Фурье для решения простейшего гиперболического уравнения с инволюцией. Получены минимальные достаточные условия существования классического решения рассматриваемого уравнения.

Основное содержание работы

Во введении была поставлена задача, представлена проблематика вопроса, а так же обозначено направление дальнейших исследований. Смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка с инволюцией выглядит так:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + q(x)u(1-x,t), \quad x \in [0,1], \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $q(x)$ - комплекснозначная функция из $C^1[0,1]$ такая, что $q(0) = q(1)$, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет естественным минимальным требованиям: $\varphi(x) \in C^1[0,1], \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1)$

Первый раздел посвящён проблематике вопроса, исследованию идей и выводу вспомогательных утверждений для дальнейшего решения задачи. В первом подразделе, например, собраны известные математические определения и теоремы, наиболее часто встречающиеся на основном этапе работы. Второй подраздел первого раздела наглядно показывает причины получения завышенных достаточных условий на начальные данные в процессе обоснования формального решения, полученного по методу Фурье, для смешанной задачи колебания струны, закреплённой на концах. Задача ставится следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \tag{4}$$

с граничными условиями:

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0 \tag{5}$$

и начальными

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{6}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{7}$$

формальное решение данной задачи даётся в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos\frac{\pi n}{l}at + B_n sin\frac{\pi n}{l}at) sin\frac{\pi n}{l}x \tag{8}$$

обосновать полученное формальное решение - доказать, что ряд (8) сходится к непрерывной функции $u(x,t)$, которая удовлетворяет уравнению (4), граничным условиям (5) и начальным (6), (7). Доказательство приводится с использованием метода почленного дифференцирования ряда (обобщённый принцип суперпозиции). Так как уравнение (4) - уравнение второго порядка, то почленно дифференцировать приходится дважды. Для того чтобы обеспечить легитимность почленного дифференцирования, на начальные данные накладываются следующие достаточные условия:

1)Производные функции $\varphi(x)$ до второго порядка включительно непрерывны, третья производная кусочно-непрерывна и, кроме того,

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \qquad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

Для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k = -1, 0, 1)$$

на начальную скорость $\psi(x)$ следует наложить требования:

2)Функция $\psi(x)$ непрерывно-дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и, кроме того,

$$\psi(0) = \psi(l) = 0$$

которые, очевидно, являются завышенными и не имеют отношения к физики задачи.

В третьем подразделе работы рассматривается альтернативный подход к обоснованию метода Фурье, предложенный В.А. Чернятиным. В качестве результата исследования приводиться теорема:

сформулируем задачу

$$L_x u(x,t) + H_t u(x,t) = f(x,t) \tag{9}$$

$$U_i u(0,t) + V_i u(\pi,t) = 0 \qquad \forall\, t \in [0,T] \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{10}$$

$$\frac{\partial^j u(x,0)}{\partial t^j} = \varphi_j(x) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, m-1) \tag{11}$$

$$u(x,t) \in C^{k,m}(\overline{Q}), \tag{12}$$

Рассмотрим формальный функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) y_n(x), \tag{13}$$

Теорема 1. Решение смешанной задачи (9)-(12) существует тогда и только тогда, когда функции $q_r(x)$, $p_r(t)$ $f(x,t)$ и $\varphi_j(x)$ таковы, что сумма $S(x,t)$ функционального ряда (13) принадлежит классу

$$S(x,t) \in C^{k,m}(\overline{Q}) \tag{14}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$U_i S(0,t) + V_i S(\pi,t) \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \tag{15}$$

Важным выводом, сделанным В.А. Чернятиным, является тот факт, что не существует общего метода выделения структурных особенностей формального решения, с целью избежать почленного дифференцирования ряда, а потому каждая задача уникальна в своём роде.

В четвёртом подразделе первого раздела формулируется важный результат представления частичной суммы ряда Фурье по собственным и присоединённым функциям через контурный интеграл от резольвенты. Соответствующий результат приводится в виде теоремы:

Теорема 2. Имеет место формула:

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda,$$

где $S_r(f,x) = \sum\limits_{|\lambda_k|<r} (f,\psi_k)\varphi_k$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - система всех собственных и присоединённых функций для тех λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - система, биортогональная всей системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Нумерация $\{\varphi_k\}$ идёт в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учётом кратности (то есть каждому φ_k соответствует теперь только одно λ_k, или иначе, одно и тоже λ_k повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных и присоединённых функций).

Во втором разделе работы мы приступаем к изучению задачи (1)-(3) с целью получения классического решения по методу Фурье и минимальных достаточных условий на начальные данные. Для достижения поставленной цели, согласно идеям А.Н. Крылова и В.А. Чернятина, необходимо получить уточнённые асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций соответствующего спектрального оператора. Решению этой задачи и посвящён первый подраздел второго раздела. Введем оператор L:

$$Ly = l[y] = y'(x) + q(x)y(1-x), \quad y(0) = y(1)$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу $Ly = \lambda y$:

$$y'(x) + q(x)y(1-x) = \lambda y(x), \tag{16}$$

$$y(0) = y(1) \tag{17}$$

Осуществим переход от системы (16)–(17) к системе Дирака. Положим $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$ (T — знак транспонирования) и рассмотрим систему

$$Bz'(x) + P(x)z(x) = \lambda z(x), \tag{18}$$

Лемма 1. Если $y(x)$ есть решение уравнения (16) и $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^T$, где $z_1(x) = y(x), z_2(x) = y(1-x)$, то $z(x)$ удовлетворяет системе Дирака (18) и условию

$$z_1(1/2) = z_2(1/2) \tag{19}$$

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет (18)–(19), то $y(x) = z_1(x)$ удовлетворяет уравнению (16)

где $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P(x) = \begin{pmatrix} 0 & \text{q(x)} \\ \text{q(1-x)} & 0 \end{pmatrix}$, и $z_1(x) = z_2(1-x)$.

Для общего решения системы Дирака, в свою очередь, известна асимптотическая формула:

Теорема 3. Для общего решения системы (18) справедлива асимптотическая формула:

$$z(x,\lambda) = U(x,\lambda)e^{\lambda Dx}c, \tag{20}$$

где $U(x,\lambda) = E + O(1/\lambda)$, E — единичная матрица, $c = (c_1, c_2)^T$ — произвольный постоянный вектор. Матрица $O(1/\lambda)$ регулярна по λ в каждой из полуплоскостей $Re\lambda \geq -h, Re\lambda \leq h$ (h — любое фиксированное положительное число), и оценка $O(.)$ равномерна по x.

В тоже время для формулы (20) справедливо уточнение:

Теорема 4. Если $Re\lambda \geq -h$, то для $U(x,\lambda) = (u_{ij}(x))_1^2$ в формуле (20) справедливы асимптотические формулы:

$$u_{11}(x) = 1 + \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$u_{12}(x) = \frac{1}{2\lambda}(q_2(x) - q_2(1)e^{-2\lambda(1-x)} + \int\limits_x^1 e^{2\lambda(x-t)}q_2'(t)\,dt) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$u_{21}(x) = -\frac{1}{2\lambda}(q_1(x) - q_1(0)e^{-2\lambda x} + \int\limits_0^x e^{-2\lambda(x-t)}q_1'(t)\,dt) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$u_{22}(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^x q_1(t)q_2(t)\,dt + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

где $q_2(x) = q(x)$, $q_1(x) = -q(1-x)$, $O(1/\lambda^2)$ регулярны при больших $|\lambda|$ и оценки $O(.)$ равномерны по x.

Подставляя краевые условия в уравнение (20), получаем характеристическое уравнение в асимптотиках:

$$\begin{vmatrix} u_{11}(0) - u_{21}(0) & u_{12}(0) - u_{22}(0) \\ [u_{11}(1/2) - u_{21}(1/2)]\,e^{\lambda/2} & [u_{12}(1/2) - u_{22}(1/2)]\,e^{-\lambda/2} \end{vmatrix} = 0$$

Далее, подставляя в него оценки из Теоремы 3 и Теоремы 4, получим асимптотические и уточнённые асимптотические формулы для собственных значений:

Теорема 5. Собственные значения оператора L, достаточно большие по модулю, простые и для них справедливы асимптотические формулы:

$$\lambda_n = 2n\pi i + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots,$$

где n_0 — некоторое достаточно большое натуральное число.

Теорема 6. Для собственных значений λ_n имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$\lambda_n = 2n\pi i + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha_n}{n}, n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots\ .$$

где через α обозначены различные константы, не зависящие от n (из конечного набора констант), через α_n такие константы, что $\sum\limits_{i=\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.

Аналогичным образом, из уравнения (20), используя краевые условия системы Дирака, а так же оценки в теорема 3,4, а так же некоторые вспомогательные оценки, приходим к асимптотическим и уточнённым асимптотическим формулам для собственных функций спектрального оператора.

Теорема 7. Для собственных функций оператора L имеют место асимптотические формулы:

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n = \pm n_0, \pm(n_0+1), \ldots\ ,$$

где оценка $O(.)$ равномерна по $x \in [0,1]$.

Теорема 8. Для собственных функций $y_n(x)$ оператора L имеют место уточненные асимптотические формулы:

$$y_n(x) = e^{2n\pi ix} + \Omega_{1n}(x) + \Omega_{2n}(x) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где

$$\Omega_{1n}(x)=\frac{1}{n}[b(x)e^{-2n\pi ix}+b(x)e^{2n\pi ix}+b(x)\alpha_n e^{-2n\pi ix}+b(x)\alpha_n e^{2n\pi ix}],$$

$$\Omega_{2n}(x)=\frac{1}{n}[b(x)\int\limits_0^x e^{2n\pi it}q_2'(\frac{x-t}{2})\,dt+b(x)\int\limits_0^x e^{-2n\pi it}q_2'(\frac{x+t}{2})\,dt],$$

оценки $O(.)$ равномерны по $x \in [0,1]$, а через $b(x)$ обозначаем различные непрерывные функции из некоторого конечного набора.

Во втором подразделе второго раздела речь идёт непосредственно об обосновании формального решения, полученного по методу Фурье. По методу Фурье формальное решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(R_\lambda\varphi)(x)e^{\lambda t}\,d\lambda+\sum_{|\lambda_n|>r}\frac{(\varphi,z_{-n})}{(y_n,z_{-n})}y_n(x)e^{\lambda_n t}, \qquad (21)$$

где $r>0$ фиксировано и таково, что при $|\lambda_n|>r$ все собственные значения простые.

Теперь приступим к обоснованию метода, для этого рассмотрим модельную задачу, полученную из (1)-(3) приравниванием к нулю потенциала.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \qquad u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad u(x,0)=\varphi(x) \qquad (22)$$

Общее решение дифференциального уравнения по методу характеристик есть $u(x,t)=F(x+t)$, где $F(x)$ — произвольная функция из $C^1(-\infty,+\infty)$.

Из граничных и начальных условий имеем: $F(x+t)$ будет решением задачи (22) тогда и только тогда, когда $\varphi(x)\in C^1[0,1]$,

$$\varphi(0)=\varphi(1), \qquad \varphi'(0)=\varphi'(1) \qquad (23)$$

и $F(x)=F(x+1)$, причем $F(x)=\varphi(x)$ при $x\in[0,1]$. Условия (23) обеспечивают гладкость $F(x)$ и, тем самым, однозначную разрешимость задачи (22).

Теперь решим задачу (22) по методу Фурье. Формальное ее решение есть

$$u_0(x,t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi, e^{2n\pi ix}) e^{2n\pi ix} e^{2n\pi it}, \tag{24}$$

Можем утверждать, что формальное решение (22) допускает следующее разбиение:

Теорема 9. Для формального решения (22) имеет место формула

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t), \tag{25}$$

где $u_0(x,t)$ есть (23) при $F(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, $F(x) = F(x+1)$ и $F(x) = \varphi(x)$при $x \in [0,1]$,

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} ((R_\lambda - R_\lambda^0)\varphi)(x) e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{26}$$

$$u_2(x,t) = \sum_{|\lambda_n|>r} \left[\frac{(\varphi, z_{-n})}{(y_n, z_{-n})} y_n(x) e^{\lambda_n t} - (\varphi, e^{2n\pi ix}) e^{2n\pi i(x+t)} \right]. \tag{27}$$

Применяя уточнённые асимптотические оценки, полученные в предыдущем подразделе, и проводя некоторые математические манипуляции приходим к важному утверждению.

Теорема 10. Ряд в (25) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t сходятся абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ и $t \in [-A, A]$ при любом $A > 0$.

То есть в процессе обоснования метода Фурье мы получили достаточные условия на начальные данные в виде необходимых и достаточных условий сходимости ряда (24). Теперь всё готово для того чтобы сформулировать основной результат из третьего подраздела второго раздела.

Теорема 11. Если $q(x) \in C^1[0,1]$, $q(0) = q(1)$, $\varphi(x) \in C^1[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, то классическое решение задачи (1)–(3) существует и имеет вид (21).

Основные источники, используемые в работе:

Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1991.–112 с

Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. М.–Л. : ГИТТЛ, 1950.–368 с

Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Смешанные задачи для гиперболических уравнений первого порядка с инволюцией // Докл. РАН Т. 441, № 2. , 2011. С. 151-–154.

Заключение

В данной работе решена смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения первого порядка, с помощью метода Фурье. Получены необходимые и достаточные условия существования классического решения.

В ходе обоснования формального решения, полученного по методу Фурье, были получены достаточные условия, накладываемые на начальные данные, которые совпали с необходимыми условиями существования классического решения. Таким образом, можем утверждать, что полученные достаточные условия являются неулучшаемыми, а значит достигнута основная цель работы.