Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра
математической теории упругости и биомеханики

Термоустойчивость пологой изотропной геометрически нерегулярной оболочки постоянного кручения, из термочувствительного материала

АВТОРЕФЕРАТ
МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 237 группы
направления 01.04.03 Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Суровой Марии Юрьевны

Научный руководитель
д.т.н., профессор ____________ Г.Н. Белосточный

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____________ Л.Ю. Коссович

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Геометрически нерегулярные изотропные оболочки, которые представляют собой композиции из оболочек различных толщин, оболочки и пластинки, гладко сопряженные между собой, ребристые оболочки и т.п., широко используются в различных областях техники. Условия эксплуатации предусматривают в ряде случаев воздействие стационарных и нестационарных температурных полей со стороны рабочей среды. Нагрев, как показывает практика, приводит к ухудшению прочностных характеристик конструкционных материалов. При воздействии температурных полей могут возникать термические напряжения, значительно превосходящие напряжения от силовых нагрузок. Воздействие температурных полей на тонкостенные конструкции приводят к изменению первоначальной геометрии конструкции, что недопустимо, например, в ракетной и авиационной технике, электронном машиностроении по вполне понятным причинам. Следует также отметить, что воздействие температуры приводит к уменьшению сопротивляемости конструкции по отношению к внешним силовым нагрузкам. Поведение оболочек в температурных полях практически непредсказуемо по причине сложности тепловых и термоупругих процессов. Все это требует разработки методик расчета, использующих аппарат механики сплошных сред.

Цель работы: вариационным путем получить уравнения статической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки постоянного кручения, рассмотреть конкретную краевую задачу термоупругости с целью определения наименьших значений температур, при достижении которых становится возможным скачкообразный переход тонкостенной конструкции к новым формам равновесия. Провести количественный анализ влияния геометрических параметров на величины относительных критических температур для ребристой оболочки, выполненной из термочувствительного материала.

Для достижения цели поставлены следующие задачи исследования:

1. Построить силовую функцию термоупругой системы «оболочка постоянного кручения – ребра», выполненную из термочувствительного материала;
2. Вывести уравнения термоупругости для рассмотренной ребристой оболочки из вариационного принципа Лагранжа;
3. На основании метода Галеркина вывести уравнения для определения критических температур рассмотренной термоупругой системы;
4. Провести количественный анализ влияния геометрических параметров оболочки на величины критических температур.

Материалы и методы исследования. Использованы стандартные положения термомеханики сплошных сред, вариационных принципы механики, известные положения теории нагретых геометрически нерегулярных пологих оболочек, приближенные аналитические методы высшего анализа. Достоверность подтверждается использованием апробированных положений теории термоупругости тонкостенных оболочек, использованием известных приближенных аналитических методов высшего анализа и сравнение количественных результатов с результатами ранее полученными другими авторами.

Научная новизна. Решена задача термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки постоянного кручения, при этом исходные уравнения термоупругости ребристой оболочки записаны в компонентах поля перемещений, а разрешающие уравнения для критических температур позволяют с необходимой точностью определять влияние геометрических параметров и термочувствительности материала на величины критических температур.

Практическая значимость: полученные результаты могут быть использованы при конкретных проектных расчетах конструкций в известных областях техники.

Структура. Работа состоит из введения, трех глав и заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований.

Положения, выносимые на защиту:

1. Вывод на основе вариационного принципа механики, статических уравнений термоустойчивости пологой ребристой оболочки из термочувствительного материала в компонентах поля перемещений;
2. Постановка и решение задачи статической термоустойчивости оболочки постоянного кручения подкрепленной ребрами жесткости;
3. Определение усилий и перемещений, возникающих в оболочке в ее исходном безмоментном состоянии;
4. Определение уравнения для критических температур (двумя путями) на основании метода Галеркина. Анализ влияния геометрических и физических параметров оболочки на величины критических температур.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе приводятся основные соотношения и уравнения теории пологих изотропных оболочек, находящихся в температурных полях. Выражение силовой функции через перемещения имеет вид

$$J=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b\Bigg(B\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+B\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial y}+Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2k_{12}w\right)^2+$$
$$+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4D_k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+ \qquad (1)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[E_{2i}^{p}J_i^{p}\kappa_i^{p}-T_{2i}^{p}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\delta(x-x_i)-q^*\Bigg)dxdy$$

где

$$q^*=T_1^0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+T_2^0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2S^0\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

После некоторых преобразований выражение (1) будет иметь вид

$$J=\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b B\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2B\nu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+B\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+Gh\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+Gh\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+4Ghk_{12}^2w^2+$$

$$+2Gh\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-4Ghk_{12}w\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+4Dk\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+ \qquad (2)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[E_{2i}^{p}J_i^{p}\kappa_2^2-T_{2i}^{p}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\delta(x-x_i)-T_1^0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-T_2^0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-2S^0\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

Из вариационного уравнения

$$\delta J=0$$

выводятся уравнения статической термоустойчивости оболочки постоянного кручения подкреплённой ребрами жесткости в компонентах поля перемещений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{Gh}{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\nu+\frac{Gh}{B}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-2\frac{Gh}{B}k_{1,2}\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{Gh}{B}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\nu+\frac{Gh}{B}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{Gh}{B}k_{1,2}\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad (3)$$

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D\nu+2D_k)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+4Ghk_{1,2}^2w-2Ghk_{1,2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[E_{2i}^{p}J_i^{p}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+T_{2i}^{p}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\delta(x-x_i)+T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

Усилия, входящие в третье уравнение системы, предварительно определяются как решения уравнений безмоментного состояния. Таким образом задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (3). Решения (при первом подходе) сведем к интегрированию одного дифференциального уравнения восьмого порядка методом функции перемещения, которая связана с компонентами поля перемещения соотношениями тождественно удовлетворяющими первым двум уравнениям системы (3):

$$u = 2k_{1,2}\frac{Gh}{B}\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} - \nu\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y}\right)$$

$$v = 2k_{1,2}\frac{Gh}{B}\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} - \nu\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2}\right) \qquad (4)$$

$$w = \frac{Gh}{B}\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \left(\frac{E}{G} - 2\nu\right)\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right)$$

а третье уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^8} + 4\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^6 \partial y^2} + 6\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^4 \partial y^4} + 4\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8} + \\
&+ \frac{48}{a^2 b^2}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2 (1-\nu^2)\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \\
&+ \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{E_{2i}^p J_i^p}{D}\left[\frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^4 \partial x^4} + 2\frac{\partial^8 \Phi}{\partial x^2 \partial y^6} + \frac{\partial^8 \Phi}{\partial y^8}\right] + \frac{T_{2i}^p}{D}\left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^2 \partial x^4} + 2\frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 \Phi}{\partial y^6}\right)\right\}\delta(x - x_i) + \\
&+ \frac{1}{D}\left(T_1^0\frac{\partial^2}{\partial x^2} + T_2^0\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2S^0\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)\left[\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right] = 0
\end{aligned} \qquad (5)$$

При решении задачи термоустойчивости можно исходить из системы (3), либо из уравнения (5).

Во второй главе ставится и решается задача о нахождении критических температур (задача термоустойчивости) в случае пологой ребристой оболочки постоянного кручения, выполненной из термочувствительного материала.

Рассматривается тонкостенная конструкция в виде пологой изотропной оболочки толщины h, находящаяся в температурном поле, интенсивность которого монотонно возрастает, перекрывающую прямоугольный план со сторонами a и b (рис.1) и подкрепленную ребрами жесткости n, нейтральные оси которых совпадают с координатными линиями $x = x_i \quad (i = 1,2,3,....n)$. В некотором диапазоне температур, оболочка находится в безмоментном состоянии, дальнейшее повышение температуры приводит к скачкообразному переходу оболочки к новой моментной форме равновесия.

Уравнение срединной поверхности оболочки имеет вид

$$z(x, y) = \frac{\delta}{ab} xy,$$

где δ - наибольший ее подъем над планом.

Края оболочки шарнирно закреплены:

$$u = 0; \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; x = 0; x = a \tag{6}$$

$$u = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0; w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; y = 0; y = b$$

Будем выражать приближенно $\Phi(x, y)$ в виде ряда, тождественно удовлетворяющего граничным условиям (6):

$$\tilde{\tilde{\Phi}}(x, y) = \sum_{k,m} C_{k,m} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \tag{7}$$

Применяя метод Бубнова – Галеркина к уравнению (5), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно $C_{k,m}$, которая имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя из всех ее элементов. Это условие дает нам уравнение для определения критической температуры:

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_0\theta(1+\beta\theta))(\sum_{i=1}^{n}\frac{24(1-\nu^2)}{a}\frac{a_i h_i^p}{a}\sin\frac{\pi x_i}{a}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^4+\left(\frac{\pi}{b}\right)^6\right]+\\
&+\frac{12(1+\nu)}{h^2}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^6+2\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^4+\left(\frac{\pi}{b}\right)^6\right])-\\
&-\sum_{i=1}^{n}\frac{24(1-\nu^2)}{a}\frac{J_i^p}{h^3}\sin\frac{\pi x_i}{a}\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\left(\frac{\pi}{b}\right)^4+2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^6+\left(\frac{\pi}{b}\right)^8\right]-\\
&-\frac{48}{a^2b^2}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2(1-\nu^2)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^2-\\
&-\left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^8+4\left(\frac{\pi}{a}\right)^6\left(\frac{\pi}{b}\right)^2+6\left(\frac{\pi}{a}\right)^4\left(\frac{\pi}{b}\right)^4+4\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{b}\right)^6+\left(\frac{\pi}{b}\right)^8\right]
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

При определении критических температур можно исходить и из системы дифференциальных уравнений термоустойчивости в перемещениях (3). В результате мы снова приходим к уравнению (8).

В третьей главе проводится количественный анализ влияния геометрических и физических параметров ребристой оболочки на величины критических температур.

Результаты расчетов показали следующее:

1. Увеличение изгибной жесткости ребра, при прочих равных условиях ведет к значительному увеличению критической температуры;
2. С увеличением параметра β характеризующего величину изменения коэффициента линейного расширения от температуры, величина критической температуры уменьшается;
3. С увеличением относительной высоты подъема оболочки над планом $\frac{\delta}{h}$ наблюдается тенденция к существенному увеличению критической температуры;
4. Влияние параметра $\frac{a}{b}$ на величину критической температуры следует определять в каждом конкретном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены результаты:

1. Вариационным путем выведена система уравнений статической термоустойчивости геометрически нерегулярной оболочки постоянного кручения в компонентах поля перемещений;
2. На основании решений уравнений безмоментного состояния определяются внутренние усилия, которые содержатся в виде коэффициентов в уравнениях термоустойчивости, которые возникают в оболочке при нагреве;
3. Методом функций перемещений, система трех дифференциальных уравнений термоустойчивости сведена к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка исходя из которого на основании метода Галеркина получено алгебраическое уравнение для определения критических температур.
4. Проведён количественный анализ влияния физических и геометрических параметров оболочки на величины критических температур. Количественные результаты представлены в виде таблиц.