Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Многочлены Бернштейна от 2-х переменных

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Борисова Владимира Александровича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Лукомский С.Ф.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Многочлены в форме Бернштейна описаны Сергеем Натановичем Бернштейном в 1912 году и использованы им в конструктивном доказательстве аппроксимационной теоремы Вейерштрасса [1]. Полиномы Бернштейна играют важную роль в построении кривых Безье, активно использующихся при геометрическом моделировании [2].

Геометрическое моделирование (компьютерная геометрия, Computer Aided Geometric Design, CAGD) — относительно молодое направление в прикладной математике, выделившееся в 60-70-х годах прошлого века [3]. Оно объединило некоторые идеи из геометрии и вычислительной математики на базе компьютерных технологий. В геометрическом моделировании изучаются методы построения кривых, поверхностей и тел, а также способы выполнения над ними различных операций. К настоящему времени опубликовано большое количество работ по геометрическому моделированию.

Значительный вклад в становление данного направления внесли Пьер Безье из автомобилестроительной компании «Рено» и Поль де Кастельжо из компании «Ситроен», предложив в 60-х годах XX века независимо друг от друга методы построения кривых. Исходным объектом в их методах является упорядоченный набор полюсов — точек в конечномерном евклидовом пространстве. Построение осуществляется с помощью параметрического варианта метода последовательных линейных интерполяций. Теперь этот метод называется алгоритмом Кастельжо, а кривые и поверхности, построенные по алгоритму Кастельжо — кривыми и поверхностями Безье [4]. Форрест установил связь между кривыми Безье и полиномами в форме Бернштейна. Он показал, что функция, задающая кривую Безье, может быть представлена в виде линейной комбинации базисных полиномов Бернштейна. Это позволило исследовать свойства кривых Безье, опираясь на свойства данных полиномов. Наиболее просто строятся кривые Безье невысоких порядков (2-го, 3-го и 4-го). Но их возможности не позволяют получать кривые сложной формы. Имеется следующий выход из данной ситуации. Можно использовать составные кривые, сшитые из сегментов, каждый из которых является кривой Безье невысокого порядка. При этом обеспечение гладкости достигается за счёт условий, накладываемых на полюсы сшиваемых кривых.

Перейти от кривых к поверхностям Безье можно двумя способами. В первом вводятся так называемые образующие кривые Безье, имеющие одинаковую параметризацию. При каждом значении параметра по точкам на этих кривых, в свою очередь, строится кривая Безье. Перемещаясь по образующим кривым, получаем поверхность, которая называется поверхностью Безье на четырёхугольнике. Областью задания параметров такой поверхности является прямоугольник. Другой подход использует естественное обобщение полиномов Бернштейна на случай двух переменных. Поверхность, которая задается таким полиномом, называется поверхностью Безье на треугольнике. Она имеет треугольную область задания параметров.

Цель работы: исследовать аппроксимационные свойства полиномов Бернштейна, исследовать свойства кривых Безье, описать схему построения составных кривых и поверхностей Безье, сформулировать условия гладкости, разработать программную систему компьютерного моделирования с использованием кривых и поверхностей Безье.

Основная часть работы состоит из шести разделов. В первом разделе формулируется и доказывается свойство полиномомов Бернштейна, связанных с приближением производной функции производными полинома Бернштейна. Получена оценка этого приближения. Во втором разделе даны определения кривых Безье, установлена их связь с полиномами Бернштейна и основные свойства. В третьем разделе рассматривается задача построения составной кривой Безье, сформулированы условия, накладываемые на концы соединяемых кривых, при удовлетворении которых составная кривая относится к тому или иному классу непрерывности. В четвертом разделе произведен переход к поверхностям Безье. Описана схема построения элемента поверхности Безье на четырехугольнике, основой для построения которого служат кривые Безье. Все рассуждения в третьем разделе касаются одного элемента поверхности. Задача построения составной поверхности Безье из нескольких элементов рассматривается в пятом разделе. Как и в случае составных кривых, при построении составных поверхностей нужно удовлетворять некоторым условиям, чтобы полученная в результате стыковки поверхность была непрерывной, и, если необходимо, гладкой. В шестом разделе рассмотрены полиномы Берштейна от двух переменных, с использованием которых можно построить поверхность Безье иным способом, нежели описанным в четвертом разделе. В приложении продемонстрирована работа программы компьютерного моделирования поверхностей Безье. Программа написана на языке C++ с использованием программного интерфейса *OpenGL* [5][6].

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В разделе «Определения и понятия» содержатся вспомогательные сведения о конечных разностях, их делении на восходящие

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

и нисходящие,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

а также в виде лемм приведены их свойства:

Лемма 1. Справедливы следующие свойства конечных разностей:

1. $\Delta_0 f(x) = f(x)$
2. $\forall n, \alpha, \beta \in R : \Delta_n(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) = \Delta_n \cdot \alpha f(x) + \beta \Delta g(x))$.

$$\Delta_n P(x) = n! h^n c_n,$$

все разности более высокого порядка равны нулю.

Лемма 2. Конечной разностью от многочлена степени n является полином степени $(n-1)$, то есть при вычислении разности степень полинома понижается на единицу [7].

Лемма 3. Конечная разность n-го порядка от полинома степени n постоянна и равна

$$\Delta_n P(x) = n! h^n c_n,$$

все разности более высокого порядка равны нулю.

Лемма 4. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную в точке x производную n-го порядка, то

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x).$$

Теорема 5. Разности порядка m-го выражаются через функции $f(x)$ по формуле

$$\Delta_n f(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} C_n^m f(x + mh)$$

Сформулировано и обратное утверждение:

Следствие 1. Обратно, значения функции выражаются как линейная комбинация конечных разностей

$$f(x + nh) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \Delta_m f(x)$$

Доказана вспомогательная лемма:

Лемма 6. Для любого натурального числа n и для любого x имеет место неравенство

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m (m - nx)^2 x^m (1 - x)^{n-m} \leqslant \frac{n}{4}. \tag{1}$$

В первом подразделе основной части даны опеределения полиномов Бернштейна одной переменной

$$B(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$$

и базисных полиномов Бернштейна,

$$B_{m,n} = C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

где $C_n^m x^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Далее рассмотрены аппроксимационные свойства полиномов Бернштейна.

Теорема 7. Пусть приближаемая функция $f(x)$ имеет непрерывную производную k-го порядка $f^{(k)}(x)$, тогда производные от приближающих полиномов $B_n^{(k)}(x)$ имеют пределом эту производную, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x).$$

В виде следствия из тоеремы сформулирована оценка приближения:

Следствие 2. Положив в равенстве (11) $n+k=l$ и учитывая, что сумма

$$\sum_{m=0}^{n} f^{(k)}(\xi_n^{(m)}) C_n^m x^m (1-x)^{n-m} \leqslant M_k = ||f^{(k)}(x)||,$$

где M_k — модуль-максимум функции $f^{(k)}(x)$, получим оценку приближения производных функции $f^{(k)}(x)$ производными полинома Бернштейна $B_l(f)^{(k)}$:

$$||B_l(f)^{(k)}|| \leqslant \frac{(l)_k}{l^k} ||f^{(k)}(x)||$$

где $\frac{(l)_k}{l^k} = \left(1-\frac{0}{l}\right)\left(1-\frac{1}{l}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{l}\right)$.

Полином Бернштейна с векторыми коэффициентами задает в пространстве R^n кривую, которая называется кривой Безье.

$$r(t) = \sum_{m=0}^{n} p_i B_{m,n}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

Этому вопросу, а также вопросу нахождения производных кривых Безье, сводящемуся к дифференцированию базисных полиномов Бернштейна, посвящен второй подраздел. Есть возможность находить производные рекуррентно.

Теорема 8. Производные n-порядка от полиномов Бернштейна выражаются через значения полиномов $n-1$ порядка по формуле:

$$\frac{d}{dt}B_{m,n}(t) = n(B_{m-1,n-1}(t) - B_{m,n-1}(t)), \quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

Тут же выявлены некоторые свойства кривых Безье.

В подразделе под номером 3 рассмотрена схема построения составных кривых Безье. Отдельное внимание уделено условиям гладкости составных кривых. Для формулировки условия в виде соотношения, накладываемого на полюсы сшиваемых кривых, рассматриваются две кривые Безье: $q(t)$ степени n и $p(t)$ степени m и сопоставляются значения полиномов и их производных в точке сопряжения $t = 1$ для $q(t)$ и $t = 0$ для $p(t)$.

Принадлежность кривой к тому или иному классу непрерывности влияет и на ее вид.

Теорема 9. Пусть имеем две кривые Безье n порядка, обладающие параметрической непрерывностью класса C_1, тогда три вершины q_{n-1}, $q_n = p_0$ и p_1 коллинеарны и точка сопряжения $p_0 = \frac{p_1+q_{n-1}}{2}$.

Четвертый подраздел описывает процесс построения поверхности на основе кривых Безье. Такую поверхность будем называть поверхностью Безье на четырехугольнике, а ее векторный вид для порядка $m \times n$

$$B(u,v) = \sum_{i=0}^{m} N_i(v)B_{i,m}(u) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v) \tag{2}$$

Также приведен пример построения бикубической поверхности Безье ($n = m = 3$), которая задается шестнадцатью опорными точками и наиболее часто используется в трехмерном моделировании. В процессе работы была создана программа трехмерного моделирования, в которой визуализирована бикубическая поверхность с возможностью интерактивного изменения положения опорных точек, тем самым меняя конфигурацию поверхности. Изображения, демонстрирующие работу программы, представлены в приложении работы. Более сложные объекты строятся путем построения составных поверхностей Безье.

Схема такого построения описана в разделе 5. Условия сшивания сформулированы для двух бикубических поверхностей Безье для удобства графического построения. Рассматриваемые бикубические поверхности в матричной форме имеют вид [16]:

$$Q(u,v) = UM_3B3M_3^TV, \quad B(u,v) = UM_3BM_3^TV.$$

Соединение поверхностей будет происходить вдоль ребра $Q(1,v) = B(0,v)$ при $v \in [0,1]$.

Для обеспечения C_0 гладкости вдоль границы необходимо выполнение условия:

$$Q_{3,i} = B_{0,i}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Теорема 10. Для обеспечения непрерывности градиента или C_1 непрерывности при переходе через границу необходимо, чтобы отрезки полигональной сетки, встречающиеся у границы и пересекающие ее, были коллениарными.

Раздел 6 посвящен полиномам Берштейна от двух переменных

$$B(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks} C_n^{k,s} u^k v^s (1-u-v)^{n-k-s}$$

где $C_n^{k,s} = \frac{n!}{k!s!(n-k-s)!}$ — триномиальные коэффициенты. Базисные полиномы Бернштейна в этом случае имеют вид [18]:

$$B_{ks}^{n}(u,v) = C_n^{k,s} u^k v^s (1-u-v)^{n-k-s},$$

Поверхность, заданная полиномом Бернштейна от двух переменных с векторными коэффициентами, называется поверхностью Безье на треугольнике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были рассмотрены полиномы Берншейна и их свойства. Даны определения кривых Безье, описан принцип построения составной кривой Безье, поверхности Безье и составной поверхности Безье. Разработана программная система компьютерного моделирования с использованием кривых и поверхностей Безье.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Бернштейн, С.Н.Собрание сочинений / С.Н. Бернштейн. М.: АН СССР, 1952. 577 с.

2 Бейкер, Х. Компьютерная графика и стандарт OpenGL / Х. Бейкер / М.: Издательский дом Вильямс, 2002. 1168 с.

3 Тихомиров, В. Две теоремы Бернштейна / В. Тихомиров // Журн. Квант. М.: Мир, 2007. №6. С. 21–23.

4 Райт, Р.С. OpenGL. Суперкнига / Р.С. Райт; пер. А.В.Назаренко. 3-е изд. М.: Издательский дом Вильямс, 2006. 1040 с.

5 Верма, Р.Д. Введение в OpenGL / Р.Д. Верма. М.: Издательский дом Вильямс, 2006. 306 с.

6 Гайдуков, С.А. Профессиональное программирование трехмерной графики на C++ / С.А. Гайдуков. Спб.: БХВ-Петербург, 2004. 746 с.

7 Вержбицкий, В.М. Численные методы / В.М. Вержбицкий. М.: Директ-Медиа, 2013. 400 с.

8 Гончаров, В.Л. Теория интерполирования и приближения функций / В.Л. Гончаров. Гос. изд. тех.-теор. лит., 1984. 316 с.

9 Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. М.: Изд. физ.-мат. лит., 2002. 472 с.

10 Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. М.: Мир, 2001. 604 с.

11 Farin, G. Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide / G. Farin. 5 изд. Academic Press, 1997. 425 с.

12 Эйнджел, Э. Интерактивная и компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL / Э. Эйнджел; пер. В.Т. Тертышного. 2 изд. М.: Издательский дом Вильямс, 2001. 590 с.

13 Григорьев, М.И. Поверхности Безье на четырехугольнике и гладкие составные поверхности / М.И. Григорьев, В.Н. Малоземов, А.Н. Сергеев // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т.46. №11. С. 1420–1512.

14 Григорьев, М.И. Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье / М.И. Григорьев, В.Н. Малоземов, А.Н. Сергеев // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т.46. №11. С. 1632–1697.

15 Kenneth, I.J. Bernstein Polynomials / I.J. Kenneth // Computer Science Department, 1996. 11 с.

16 Salomon, D. The Computer Graphics Manual / D. Salomon. Springer, 2011. 1507 с.

17 Фокс, А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. М.: Мир, 1982. 304 с.

18 Salomon, D. Curves and Surfaces for Computer Graphics / D. Salomon. Springer, 2006. 460 с.

19 Григорьев, М.И. Полиномы Бернштейна от двух переменных/ М.И. Григорьев, В.Н. Малоземов, А.Н. Сергеев // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т.46. №11. С. 1692–1971.

20 Григорьев, М.И. Поверхности Безье на треугольнике. Перепараметризация / М.И. Григорьев, В.Н. Малоземов, А.Н. Сергеев // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т.44. №8. С. 892–940.