Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяция параболическими сплайнами

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 421 группы
направления (специальности)
02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Журба Екатерины Андреевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ______________________ Матвеева Ю.В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ______________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

Введение.В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций. В связи с этим постоянно разрабатываются различные аппараты приближения. Одним из таких аппаратов, зарекомендовавших себя как в теоретических исследованиях, так и в приложениях, являются так называемые сплайны.

Рассматриваемая параболическая интерполяция достаточно удобна, так как не требует больших расчетов. Параболическая интерполяция была разработана А.У. Оверхаузером. Он строил кривую интерполяции, исходя из геометрических соображений.

Изначально сплайном (англ. spline) называли гибкую металлическую линейку — универсальное лекало, которое использовали чертёжники для соединения точек на чертеже плавной кривой, то есть для графического исполнения интерполяции. В современном понимании, сплайнами называются функции, которые склеены из различных кусков многочленов по фиксированной системе. Простейший пример — ломаные.

Среди сплайнов важнейшую роль играют кусочно-полиномиальные сплайны, склеенные из кусков многочленов. Развитию теории таких сплайнов и их популяризации много содействовали труды И. Шенберга. Можно сказать, что полиномиальные сплайны постепенно вытесняют многочлены во многих прикладных задачах, связанных с приближением функций.

В данной работе мы рассмотрели двумерный случай интерполяции кусочно-полиномиальными сплайнами, а именно интерполяцию функций на треугольнике.

Теория интерполирования кусочно-полиномиальными функциями, которые локально на треугольнике определяются многочленами, не была систематизирована до конца 60-х годов. К 1968 году помимо кусочно-линейных функций были известны кусочно-полиномиальные функции второй и третьей степени. Это были функции, которые не только интерполировали непрерывные функции, но и сами являлись непрерывными. Женишек построил иерархию интерполяционных кусочно-полиномиальных функций на треугольнике.

Общую же оценку сверху для произвольной триангуляции, произвольных интерполяционных процессов получили Сьярле и Равьяр. Следует подчеркнуть, что до работы Сьярле и Равьяра (1972 год) изучался только двумерный случай, они же получили оценки погрешности для произвольной размерности.

Как правило, оценки погрешности аппроксимации для производных интерполируемой функции характеризуются двумя параметрами: диаметром разбиения и дополнительной характеристикой, которой в двумерном случае в указанных работах служил синус наименьшего угла триангуляции или его аналог. В некоторых случаях наименьший угол, фигурирующий в оценках

Сьярле-Равьяра, можно заменить на средний (или наибольший, что с точностью до констант равносильно).

Подобные оценки автоматически переносятся на оценки погрешности метода конечных элементов, с которым тесно связаны. Для кусочно-линейных функций в двумерном случае Синдж указал верхнюю, а Зламал нижнюю оценки, зависящие от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла. Результат Синджа-Зламала был обобщен Ю.Н. Субботинным на кусочно-полиномиальные функции произвольной степени и размерности.

Знание таких точных результатов позволяет более эффективно выбирать базисные функции. В отличие от лагранжевой интерполяции, где к настоящему моменту все выяснено, интерполяционные процессы типа Эрмита и Биркгофа еще мало изучены. Основные результаты по биркгофовой интерполяции для кусочно-линейных и кусочно-параболических функций получены Д.О.Филимоненковым.

В данной работе предложены для способа интерполяции типа Биркгофа многочленами второй степени на треугольнике, оценки погрешности в одном из которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от угла.

Цель данной работы заключается в исследовании кусочно-параболической интерполяции на треугольнике для функции двух переменных.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

— дать основные определения для интерполяции на треугольнике;

— оценить погрешность приближения функции двух переменных с помощью кусочно-параболической интерполяции на треугольнике;

— рассмотреть и решить практический пример интерполяции в пакете Wolfram Mathematica.

Работа состоит из введения; раздела с определениями и понятиями; и основной части, которая в свою очередь состоит из 4 разделов, которые имеют разделения на пункты; заключения; 4 приложений; списка используемых литературных источников, состоящего из 20 именований.

В 1 разделе основной части мы сформулировали постановку задачи.

2 раздел состоит из двух пунктов, в нём мы дали основные определения, касающиеся понятий интерполяции на треугольнике, привели вспомогательные сведения, описали первый способ интерполяции и доказали теорему о единственности многочлена, удовлетворяющего данным интерполяционным условиям, привели оценку погрешности первого способа интерполяции.

3 раздел состоит из двух пунктов, в которых мы определили второй способ интерполяции и доказали теорему о единственности многочлена, удовлетворяющего данным интерполяционным условиям, привели оценку погрешности

второго способа интерполяции.

В 4 разделе описан практический пример интерполяции, решенный в пакете Wolfram Mathematica.

Основное содержание работы. Триангуляция в наиболее общем значении — это разбиение геометрического объекта на симплексы, то есть на n-мерное обобщение треугольника. При $n = 2$ симплексы являются треугольниками.

Определение. 1. *Пусть Ω — многоугольная область в R^2 с границей Γ.*

Пусть $T_\Omega = \{\Delta_\lambda\}$ — триангуляция множества $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, то есть совокупность конечного числа замкнутых треугольников Δ_λ, обладающая следующими свойствами:

1) треугольники не имеют общих внутренних точек;

2) объединение треугольников есть Ω;

3) два треугольника могут иметь только либо общую вершину, либо общую сторону или не имеют ничего общего.

На каждом треугольнике из триангуляции для $f(x, y)$ строится интерполяционный многочлен типа Биркгофа 2-ой степени, по совокупности переменных такой, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция была непрерывна на Ω.

В силу локального рассмотрения интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен 2-ой степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением одного треугольника.

Пусть Δ — невырожденный треугольник в R^2. Через $a_i (i = 1, 2, 3)$ будем обозначать вершины треугольника Δ, через α, β, θ обозначим углы при вершине a_1, a_2, a_3 соответственно, при этом пусть выполняются неравенства $0 < \alpha \leq \beta \leq \theta < \pi$. Через $n_i (i = 1, 2, 3)$ обозначим единичную нормаль к стороне треугольника $[a_i, a_{i+1}]$. Направление нормалей $n_i (i = 1, 2, 3)$ к сторонам $[a_i, a_{i+1}]$ выберем следующим образом: если первая координата точки a_i меньше первой координаты точки a_{i+1} или первые координаты этих точек равны, а вторая координата точки a_i, меньше второй координаты точки a_{i+1}, то пусть n_i будет направлена влево при движении от точки a_i, к a_{i+1}, в противном случае n_i, будет направлена влево при движении от a_{i+1} к a_i. Через b_i обозначим середину стороны $[a_i, a_{i+1}]$. Полагаем, что в треугольнике вершина $a_4 = a_1$.

Далее без ограничения общности будем считать, что вершины Δ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0), a_2 = (-a, 0), a_3 = (0, h)$, причем $0 < a <= b$ и длина наибольшей стороны треугольника Δ равна $a + b = H$. То есть треугольник с диаметром H расположен так, что его наибольшая сторона лежит на оси $0x$.

Определение. 6. *Вершины a_i треугольника Δ мы назовём узлами триангуляции, а стороны $[a_i, a_{i+1}]$ назовём отрезками триангуляции.*

Рассмотрим класс аппроксимируемых функций:

$$W^3M = \{f(x,y) : D^l_{\eta_1,..,\eta_l} \in \mathbb{C}(\Delta), \quad (0 \le l \le 3)$$

и

$$\forall (x,y) \in \Delta, \forall \eta_1, \eta_2, \eta_3 \left| D^3_{\eta_1,\eta_2,\eta_3} f(x,y) \right| \le M\},$$

где $\mathbb{C}(\Delta)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике Δ.

Через $P_2(x,y) = P_2(f; x,y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, то есть многочлен вида:

$$P_2(x,y) = d_1x^2 + d_2y^2 + d_3xy + d_4x + d_5y + d_6. \tag{1.1}$$

Положим, что $e(x,y) = f(x,y) - P_2(x,y)$.

Обозначим за

$$e_{i,j}(x,y) = \frac{\partial^{i+j} e(x,y)}{\partial x^i \partial y^j}$$

погрешность приближения исходной функции $f(x,y)$ интерполяционным многочленом $P_2(x,y)$, а также её частных производных по x, y до 3-ого порядка включительно.

Рассмотрим первый способ интерполяции функцией двух переменных на треугольнике. Пусть данный многочлен удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i) = P_2(a_i)(i = 1,2,3); \tag{2.1}$$

$$D_{n_i} f(b_i) = D_{n_i} P_2(b_i)(i = 1,2,3). \tag{2.2}$$

В работе доказана теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена с условиями (2.1) – (2.2).

Теорема 1. *Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций W^3M, тогда $\exists! P_2(x,y)$ — интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, интерполирующий функцию $f(x,y)$ с условиями* (2.1) – (2.2).

В работе приведены оценки погрешности для предложенного способа интерполяции.

Теорема 2. *Существуют такие абсолютные положительныс константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^3M$ и любого новырожденного треугольника Δ, любого $(x, y) \in \Delta$ и для интерполяционного многочлена $P_2(x, y)$, заданного условиями* (2.1) – (2.2), *имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^{s+j} e(x,y)}{\partial x^s \partial y^j} \right\| \leq \begin{cases} C_{s,j} M H^{4-s-j}, \ (0 \leq j \leq 1, \ 0 \leq s \leq 2-j), \\ C_{0,2} M H \operatorname{ctg}, \ (j = 2, \ s = 0), \end{cases}$$

где $\|\cdot\|$ *— норма пространства* $\mathbb{C}(\Delta)$.

Рассмотрим второй способ интерполяции функцией двух переменных на треугольнике. Если же в качестве $P_2(x, y) = P_2(f; x, y)$ обозначить многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, удовлетворяющий интерполяционным условиям (2.1) и

$$D_{n_i} f(b_i) = D_{n_i} P_2(b_i)(i = 2, 3), \tag{3.1}$$

$$D^2_{n_1^2} f(b_1) = D^2_{n_1^2} P_2(b_1), \tag{3.2}$$

то имеет место следующее утверждение.

В работе доказана теорема о существовании и единственности интерполяционного многолена с условиями (2.1), (3.1), (3.2).

Теорема 3. *Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций W^3M, тогда $\exists! P_2(x, y)$ — интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит двух, интерполирующий функцию $f(x, y)$ с условиями* (2.1), (3.1), (3.2).

В работе приведены оценки погрешности второго способа интерполяции.

Теорема 4. *Существуют такие абсолютные положительныс константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^3M$ и любого новырожденного треугольника Δ, любого $(x, y) \in \Delta$ и для интерполяционного многочлена $P_2(x, y)$, заданного условиями* (2.1), (3.1), (3.2), *имеют место следующие оценки:*

$$\left\| \frac{\partial^{s} e(x,y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\| \leq C_{s-j,j} M H^{3-s}, \quad (0 \leq j \leq 2, \ j \leq s \leq 2),$$

где $\|\cdot\|$ *— норма пространства* $\mathbb{C}(\Delta)$.

В данной работе описан практический пример интерполяции, решенный в пакете Wolfram Mathematica.

Рассмотрена функция вида:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

на треугольнике Δ с вершинами:

$$a_1 = (\frac{1}{2}, 0), \quad a_2 = (-\frac{1}{4}, 0), \quad a_3 = (0, \frac{1}{2}).$$

Мы ограничились рассмотрением функции на одном треугольнике. Далее мы построили интерполяционный параболический сплайн для данной функции на указанном треугольнике. Решили данную задачу двумя способами, описанными в данной работе. Результаты интерполяции указали в приложении к данной работе.

Те же задачи рассмотрены для функции вида:

$$z = 3\sin(xy)\cos(x + y) - 2x^2y,$$

на том же треугольнике Δ.

Результаты интерполяции также представлены графически в приложениях к данной работе.

В результате первого практического примера визуально видно, что построенные параболические сплайны мало отклоняются от исходной функции, в отличии от второго практического примера. Это объясняется тем, что во второй задаче степень функции, которую мы интерполируем, выше, чем в первой задаче.

Заключение.Итак, в данной работе выполнены поставленные цель и задачи: даны основные определения, касающиеся понятий интерполяции на треугольнике; доказаны теоремы о единственности многочленов, удовлетворяющих приведенным интерполяционным условиям; приведена оценка погрешности приближения приведенных способов интерполяции, решен практический пример в пакете Wolfram Mathematica.

В заключении, тема интерполяции различными методами крайне важна, так как класс задач, решаемых этим способом, достаточно широк, он охватывает многие сферы деятельности, встречающихся как в основных вопросах математики, так и в её приложениях к естествознанию и технике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Латыпова, Н.В. Погрешность кусочно-параболической интерполяции на треугольнике // Вест. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. н-ки. 2009. Вып. 3. С.91-97.

2 Самарский,А.А. Введение в численные методы. М. : Наука, 1982. 271 с.

3 Деклу, Ж. Метод конечных элементов. М. : Мир, 1976. 95 с.

4 Субботин, Ю.Н. Многомерная кратная полиноминальная интерполяция // Мет. аппр-ии и интерп-ии : сб. Новосибирск. 1981. С. 148-152.

5 Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. М. : Наука, 2003. 632 с.

6 Латыпова, Н.В. Погрешность аппроксимации многочленами степени 4k + 3 на треугольнике // Тр. междунар. шк. С. Б. Стечкина по теор. ф-ий : сб. Екатеринбург : УрО РАН, 1999. С. 128-137.

7 Латыпова, Н.В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вест. Удмур. ун-та. Матем. Механ. Комп. н-ки. 2003. С. 3-10.

8 Субботин, Ю.Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометричеких характеристик треугольника // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т.2. С.110-119.

9 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Наука. Т.3. 1966. 656 с.

10 Ciarlet, P. G. General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods/ P. A. Raviart // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. Vol. 46, № 3. P. 177-199.

11 Гончар, А.А. О кусочно полиномиальной аппроксимации // Мат. заметки. 1972. Т. 11, вып.2. С.129-134.

12 Березин, И.С. Методы вычислений / Н.П. Жидков. М. : Физматгиз. Т. 1. 1962. 464 с.

13 Субботин, Ю.Н. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990г. Т. 48, вып. 4. С. 88–100.

14 Baidakova, N. V. A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proceeding of the Steklov Inst. of Math. 2005. Suppl. 2. P. 49-55.

15 Subbotin, Yu. N. A New Cubic Element in the FEM // Proceeding of the Steklov Inst. of Math. 2005. Suppl. 2. P. 176-187.

16 Филимоненков, Д.О. Об условии существования интерполяционного полинома второй степени в R^n // Пробл. теор. и прикл. мат. Тез. докл. конф. молодых матем. Свердловск. 1989. 47 с.

17 Стечкин,С.Б. Сплайны в вычислительной математике / Ю.Н. Субботин. М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. 1976. 248 с.

18 Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Дж. Адамс. М. : Мир. 2001. 604 с.

19 Википедия [Электронный ресурс] : свободная энциклопедия / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike ; Wikimedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон, дан. (712413 статей, 2479181 страниц, 117 104 загруженных файлов). Wikipedia®, 2001-2016. URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/Сплайн (дата обращения: 10.05.2016). Загл. с экрана. Последнее изменение этой страницы: 23:42, 28 апреля 2016. Яз. рус.

20 Самарский, А.А. Численные методы : учеб. пособие для вузов / А.В. Гулин. М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. 1989. 432 с.