Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Функции ограниченного вида и их вычисление

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы
направления 02.03.01 Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Ращупкина Евгения Олеговича

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор ____________________ Прохоров Д.В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Фундаментальные работы в комплексном анализе связаны с именами Эйлера, Римана, Коши, Вейерштрасса и многих других известных математиков. Теория конформных отображений стала бурно развиваться благодаря имеющимся применениям в инженерном деле, методы и результаты комплексного анализа применяются в аналитической теории чисел. Новый всплеск интереса к комплексному анализу связан с комплексной динамикой и теорией фракталов.

Теория функций комплексной переменной (ТФКП) расширяет класс реальных чисел и функций на множество комплексных чисел, что позволяет получить исследователю новые инструменты и возможности, отсутствующие в классическом математическом анализе. Во многих практических случаях возникает возможность упрощения как математических выводов, так и представлений математических объектов, что важно для упрощения моделирования и эффективных технологических применений.

Основы теории функций комплексной переменной (ТФКП) были заложены в середине XVIII века Л. Эйлером, а как самостоятельная ветвь математики дисциплина оформилась около середины XIX века благодаря работам О. Коши, К. Вейерштрасса, Ю. В. Сохоцкого и Б. Римана. Сейчас ТФКП является одним из важнейших разделов математики.

Ее идеи и результаты проникли во многие другие математические дисциплины, такие как алгебраическая топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, математическая физика, функциональный анализ, теория вероятностей, вычислительная математика и др. Методы ТФКП стали привычными и в ряде прикладных дисциплин (гидро- и аэромеханика, теория упругости, теория элементарных частиц).

В работе показана формула Пуассона-Иенсена и ее вывод, неравенство Пуассона-Иенсена, произведение Бляшке. Также показан класс функций ограниченного вида, сформулирована и доказана теорема Неванлинна, выписаны граничные свойства функции ограниченного вида, теорема о единственности граничных значений ограниченных функций, а так же решен практический пример в пакете Wolfram Mathematica.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕКСТА

Пусть $u(z) = u(r,\theta)$ – однозначная функция, гармоническая в круге $r < R < \infty$, за исключением, быть может, логарифмических полюсов. Обозначим, логарифмические полюсы, отличные от нуля, через $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots,$ располагая их в порядке неубывающих модулей, и пусть $\mu_j \ln|z-\zeta_j|$ – главная часть, соответствующая ζ_j. Введем ещё главную часть $\mu_0 \ln|z|$, соответствующую точке $z = 0$, полагая $\mu_0 = 0$ в случае, когда эта точка, на самом деле, не является логарифмическим полюсом для $u(z)$.

Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$l_\zeta(z) = \rho^2 \frac{z-\zeta}{\rho^2 - \bar{\zeta} z}, \tag{1.2}$$

где $|\zeta| < \rho < R$. Эта функция конформно отображает круг $|z| \leq \rho$ сам на себя так, что точка ζ переходит в центр круга.

Теорема 1. Для любого целого неотрицательного числа λ и для любой последовательности точек ζ_k такой, что $|\zeta_k| \leq |\zeta_{k+1}|$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(R - |\zeta_k|)$ сходится, существует функция $b(z)$, аналитическая в круге $|z| < R$, модуль которой не превосходит 1 в этом круге и совокупность нулей совпадает с точками

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{\lambda} \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots \tag{1.26}$$

Пусть $h(z)$ – действительная функция, определенная в некоторой области. Обозначим через $h^+(z)$ функцию, совпадающую с $h(z)$ в точках, в которых $h(z) \geq 0$, и равную нулю там, где $h(z) < 0$. Аналогично, $h^-(z)$ будет функцией, совпадающий с $-h(z)$ в точках, в которых $h(z) \leq 0$, и равной нулю там, где $h(z) > 0$. Очевидно,

$$h(z) = h^+(z) - h^-(z) \text{ и } |h(z)| = h^+(z) + h^-(z). \tag{2.1}$$

В работе представлен класс функций ограниченного вида

Если $h(z)$ – субгармоническая функция в области G, то и $h^+(z)$ является субгармонической в той же области. В самом деле, для каждой точки $z_0 \in G$ и всех достаточно малых ρ выполняется неравенство

$$h(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^+(z + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha. \tag{2.2}$$

Если $h(z) \geq 0$, то $h^+(z) = h(z)$, и мы получаем:

$$h^+(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^+(z + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha. \tag{2.3}$$

Но это соотношение остается в силе и для точек, в которых $h(z) < 0$, так как в них $h^+(z)$ обращается в нуль. Итак, $h^+(z)$ – субгармоническая функция.

Из доказанного вытекает, что неотрицательная функция $\ln^+|f(z)|$, где $f(z)$ – функция, аналитическая в области G, является субгармонической в этой области.

Пусть G есть круг $|z| < R$; предполагая, что $f(z) \not\equiv 0$, и представляя $\ln|f(z)|$ в виде $\ln^+|f(z)| - \ln^-|f(z)|$, перепишем формулу (1.14) в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha =$$
$$= ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \ln\rho^\lambda \prod_{k=1}^{\nu(\rho)} \frac{\rho}{|z_k|} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^-|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha. \quad (2.4)$$

Из этой формулы вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^-|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha - \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| - \lambda\ln\rho, \quad (2.5)$$

и поэтому ограниченность интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \qquad (0 < \rho < R) \quad (2.6)$$

означает, что

$$\varlimsup_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^-|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha < +\infty, \quad (2.7)$$

а поэтому и

$$\varlimsup_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\ln|f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha < +\infty, \quad (2.8)$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\ln|f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha. \quad (2.9)$$

Итак, условия

$$\varlimsup_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha < \infty \quad (2.10)$$

и

$$\varlimsup_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\ln|f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha<\infty \tag{2.11}$$

эквивалентны, если $f(z)\not\equiv 0$.

Мы будем обозначать через N совокупность всех функций, аналитических в круге $|z|<R$, и в случае, когда $f(z)\not\equiv 0$, удовлетворяющих условию (1.10) или (1.14), и называть ее классом функций ограниченного вида. Класс этот был введен А. Островским и братьями Р. и Ф. Неванлинна.

Очевидно, каждая функция класса N удовлетворяет вместе тем и условию (1.6) так, что для $f(z)\in N$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(R-|a_k|), \tag{2.12}$$

где a_k – нули функции $f(z)$, всегда сходится. Однако класс N составляет лишь правильную часть класса функций, подчиненных условию (1.14). Это можно видеть из непосредственного подсчета, убеждаясь, например, в том, что функция $f(z)=exp\frac{\pi i}{1-z}$ в единичном круге удовлетворяет условию (1.14), но не удовлетворяет условию (1.15). В самом деле, функция $\frac{1}{i}Lnf(z)=\frac{\pi}{1-z}+2k\pi$ является аналитической в единичном круге, а следовательно,

$$\ln|f(\rho)|=-Im\Big[\frac{1}{i}Lnf(\rho e^{i\alpha})\Big]=\frac{\pi\rho\sin\alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha} \tag{2.13}$$

есть функция, гармоническая в единичном круге. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha=\ln|f(0)|=0 \tag{2.14}$$

независимо от ρ, и условие (1.14) выполнено. С другой стороны, функция $\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|$ равна в данном случае $\ln|f(\rho e^{i\alpha})|$, если $0\le\alpha\le\pi$, и равна нулю, если $\pi<\alpha\le 2\pi$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi\rho\sin\alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\,d\alpha=$$
$$\frac{1}{4}[\ln(1+\rho^2-2\rho\cos\alpha)]_0^{\pi}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}\to\infty \text{ при } \rho\to 1, \tag{2.15}$$

т.е. условие (1.15) не удовлетворяется.

Покажем, что если функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ принадлежат классу N, то и $f(z) \pm \varphi(z)$, а также $f(z)\varphi(z)$ принадлежат к классу N, т.е. N можно рассматривать как кольцо функций. Так как разность двух функций, удовлетворяющих условию (1.6), может не удовлетворять тому же условию, то отсюда лишний раз будет следовать, что класс N составляет лишь правильную часть всей совокупности функций, подчиненных условию (1.6). В случае, когда $f(z) \pm \varphi(z)$ или $f(z)\varphi(z)$ есть тождественный нуль, наше утверждение очевидно, так как тождественный нуль входит в N. Пусть $f(z) \pm \varphi(z)$, соответственно $f(z)\varphi(z)$, не равны тождественно нулю.

Заметим, что

$$\ln^+|f(z) \pm \varphi(z)| \le \ln^+(|f(z)| + |\varphi(z)|) \le \ln 2 + \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|. \quad (2.16)$$

В самом деле, если $|f(z)| \le 1$ и $|\varphi(z)| \le 1$, то $\ln^+(|f(z)| + |\varphi(z)|) < \ln 2$, а если по крайней мере одно из чисел $|f(z)|$ или $|\varphi(z)|$ больше единицы, то

$$\ln^+(|f(z)| + |\varphi(z)|) = \ln(|f(z)| + |\varphi(z)|) < \ln[2\max(|f(z)|, |\varphi(z)|)] = \\ \ln 2 + \ln[\max(|f(z)|, |\varphi(z)|)] \le \ln 2 + \ln^\pm|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|. \quad (2.17)$$

Итак,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha}) \pm \varphi(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha \le \\ \le \ln 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\varphi(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha, \quad (2.18)$$

откуда и следует, что $f(z) \pm \varphi(z)$ принадлежит N, если $f(z)$ и $\varphi(z)$ принадлежит N. Точно так же, замечая, что

$$[\ \ln^+|f(z)\varphi(z)| \le \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)| \quad (2.19)$$

(если по крайней мере одно из чисел $\varphi(z)$ и $f(z)$ не больше единицы, то

$$\ln^+|f(z)\varphi(z)| \le \ln^+[\max(|f(z)|, |\varphi(z)|)] \le \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|, \quad (2.20)$$

если же оба числа $|\varphi(z)|$ и $|f(z)|$ превосходят единицу, то

$$\ln^+|f(z)\varphi(z)| = \ln|f(z)\varphi(z)| = \\ \ln|f(z)| + \ln|\varphi(z)| = \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|), \quad (2.21)$$

заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})\varphi(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \le$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|\varphi(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \quad (2.22)$$

и, следовательно, $f(z)\varphi(z)$ принадлежит N, если $f(z)$ и $\varphi(z)$ принадлежат N. Весьма важный подкласс функций ограниченного вида образуют функции, ограниченные по модулю. Очевидно, что если $|f(z)| \le C$, то $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \le \ln^+ C$, т.е. $f(z) \in N$. Функции, ограниченные по модулю, составляют подкольцо класса N.

Из этого, что разность двух функций класса N принадлежит тому же классу, следует, что если две функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ класса N принимают одинаковые значения в точках последовательности ζ_n, для которой ряд $\sum(R-|\zeta_k|)$ расходится (если повторяется ρ раз), то $f(z) \equiv \varphi(z)$.

Действительно, рассуждая от противного и допуская, что $f(z)-\varphi(z) \not\equiv 0$, получим функцию класса N, для которой сумма расстояний её нулей до окружности $|z| = R$ образует расходящийся ряд, что невозможно. Итак, $f(z) - \varphi(z) \equiv 0$.

Заметим, что ряд $\sum(R - |\zeta_k|)$ необходимо расходится в случае, когда последовательность ζ_k имеет по крайней мере одну предельную точку ζ_0 внутри круга $|z| < R$, так как в этом случае не выполняется необходимое условие сходимости ряда. Тогда наше утверждение представляет специальный случай внутренней теоремы единственности, Но если ни одна из предельных точек последовательности ζ_k не принадлежит кругу $|z| < R$, то упомянутая теорема неприменима.

Теорема 2. Докажем, что класс N совпадает с совокупностью всех аналитических в круге $|\zeta| < R$ функций, допускающих представление в виде частного двух аналитических ограниченных по модулю функций

$$f(z) = \frac{h_2(z)}{h_1(z)} \quad (2.23)$$

Теперь рассмотрим граничные свойства функций ограниченного вида в круге $|z| < R$, т.е. свойства, связанные с поведением функции $f(z)$, при условии, что z приближается к точкам окружности $I_R : |z| < R$

Теорема 3. Функция $f(z)$, аналитическая и ограниченная по модулю в круге $|z| < R(< +\infty)$, имеет радиальные граничные значения почти всюду на окружности $|z| = R$.

Множество точек этой окружности, в которых радиальные граничные значения не существуют, можно заключить внутрь системы дуг (конечной или бесконечной, счетной) со сколь угодно малой суммой длин.

Обозначим $\lim_{r\to R} f(re^{i\theta}) = f(Re^{i\theta})$; тогда по формуле (1.19)

$$A = F'(0) = f(Re^{i\theta}) - f(0) \tag{2.59}$$

почти всюду на сегменте $[0, 2\pi]$.

Поэтому для функции $F[\alpha]$ получаем представление

$$F(\alpha) = \int\limits_0^\alpha [f(Re^{it}) - f(0)]dt. \tag{2.60}$$

Подставляя в формулу (2.14) и интегрируя по частям, найдем:

$$f(re^{i\theta}) = f(0) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} [f(Re^{i\alpha}) - f(0)]\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + r^2}d\theta =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha})\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + r^2}d\theta. \tag{2.61}$$

Следовательно, аналитическая, ограниченная по модулю функция $f(r3^{i\theta})$ выражается через свои радиальные граничные значения интегралом Пуассона (интеграл следует здесь понимать в смысле интеграла Лебега). Этот результат был также отмечен Фату. Впоследствии он был распространен на класс H_1, определяемый как класс аналитических функций $f(z)$, для которых

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\alpha})|d\alpha \leqslant C(f) < +\infty, 0 < r < R. \tag{2.62}$$

Теорема 4. Если радиальные граничные значения функции $f(z)$, аналитической и ограниченного вида в $K_R : |z| < R$, обращаются в нуль на множестве E_R точек окружности $\Gamma_R : |z| = R$, имеющем положительную меру, то $f(z) \equiv 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана формула Пуассона-Иенсена и ее вывод, неравенство Пуассона-Иенсена, произведение Бляшке. Также показан класс функций ограниченного вида, сформулирована и доказана теорема Неванлинна, выписаны граничные свойства функции ограниченного вида, теорема о единственности граничных значений ограниченных функций, а так же решен практический пример в пакете Wolfram Mathematica.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Маркушевич, А.И. Теория аналитических функций. т. 2: Дальнейшее построение теории. / А. И. Маркушевич // Изд. 2-е, испр. и доп. -М.: Наука. 1968. С. 624.

2 Брело, М. Основы класической теории потонциала / перев. с фр. Е. Д. Соломенцева // М.: Мир. 1964. С. 135.

3 Ландкоф, Н.С. Основы современной теории потенциала / Н.С.Ландков // М.: Наука. 1966. С. 240.

4 Привалов, И.И. Субгармонические функции / И. И. Привалов // М.: ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. технико-теорет. лит., 1937. С. 120.

5 Стойлов, С. Теория функции коплексного переменного, т. 2 / С. Стойлов // М.: Издательство иностранной литературы. 1962. С. 74.

6 Голузин, Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменнго / Г.М. Голузин // изд. 2. М.: Издательство иностранноьй литературы. 1966. С. 113.

7 Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной. / А. Н. Тихонов // М.: Наука, 1967. С. 145

8 Титчмарш, Е. Теория функций. / Е. Титчмарш // М.: Наука. 1980. С. 207.

9 Евграфов, М.А. Аналитические функции. / М. А. Евграфов // М.: Наука. 1968. С. 60.

10 Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ. / Б. В. Шабат // М.: Наука. 1969. С. 157.

11 Хейман, У. Субгармонические функции / У. Хейман, П. Кеннеди // М.: Мир. 1980. С. 193.

12 Дженкинс, Дж. Однолистные функции и конфориные отображения / перев. с англ. Б. В. Шабата / М.: Издательство иностранной литературы. 1962. С. 141.

13 Лаврентьев, М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики / М. А. Лаврентьев // Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1946. С. 80.

14 Привалов, И. И. Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов // Изд. 2. ГИТТЛ. 1950. С. 163.

15 Джрбашян, М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян // М.: Наука. 1966. С. 672.

16 Евграфов, М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов // М.: Наука. 1979. С. 127.

17 Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер // М.: Наука. 1970. С. 180.

18 Гурвиц, А. Теория аналитических и эллиптических функций / перев. с 3-го нем. изд. Н. В. Икорникова // Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1933. С. 204.

19 Владимиров, В. С. Методы теории функий многих комплексных переменных / В. С. Владимиров // М.: ИЛ. 1951. С 78.

20 Лаврентьев, М. А. методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат // Изд. 3-е Физматгиз. 1964. С. 213.

21 Фукс, Б. А. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы. / Б. А. Фукс, В. И. Левин // Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1951. С. 214.