Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

О геометрии порядка

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ ДИПЛОМНОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

Механико-математический факультет

МЕРЕНКОВОЙ СВЕТЛАНЫ АНАТОЛЬЕВНЫ

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ______________________ В.Б.ПОПЛАВСКИЙ

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

В течение последних 2000 лет одной из самых читаемых книг на планете был труд Евклида ”Начала”, где он изложил все накопленные к тому времени геометрические знания в строгой логической системе, именно в том виде, в котором в настоящее время они представлены в школьном курсе геометрии. ”Начала” состоят из тринадцати книг. В первой книге Евклид приводит список постулатов, а сама систему аксиом евклидовой геометрии в целом в современном изложении разбивают на следующие пять групп.

1. Аксиомы сочетания (соединения).
2. Аксиомы порядка.
3. Аксиомы движения.
4. Аксиомы непрерывности.
5. Аксиома о параллельности.

После Евклида геометрия обогатилась сравнительно немногими новыми истинами, система построения и изложения курса геометрии оставалась неизменной, и до 19 века нашей эры никто не сомневался в том, что геометрия Евклида единственно и абсолютно истинная, что она учит нас действительным свойствам мирового пространства.

Тем не менее, из его ”Начал” можно извлечь две самостоятельные геометрии, различающиеся как своей логической основой, так и своими первоначальными понятиями и аксиомами. Они известны как абсолютная геометрия и аффинная геометрия.

Так как каждое предложение Евклида принадлежит либо аффинной, либо абсолютной геометрии, либо не принадлежит ни той, ни другой, то с первого взгляда может показаться, что эти две геометрии не имеют ничего общего, за исключением первого и второго постулатов. Однако существует группа важных предложений, принадлежащих обеим геометриям.

Целью данной работы является рассмотрение геометрии, которая составляет общий фундамент аффинной и абсолютной геометрий.

Актуальность и научная значимость работы заключается в том, что, во-первых, геометрия является первичным видом интеллектуальной деятельности и составляющей общечеловеческой культуры, поскольку некоторые аксиомы и теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников культуры. Основой геометрии является принцип доказательности утверждений. Таким образом, геометрия — один из важнейших предметов математического цикла. С помощью аксиом порядка доказываются многие утверждения и вводятся определения, которые позволяют построить геометрию порядка.

Работа состоит из введения, четырех параграфов, заключения, списка использованной литературы. Список использованной литературы включает 12 наименований.

Для начала определяется тернарное отношение промежуточности и основные аксиомы порядка, которые позволяют в дальнейшем вывести определения интервала, отрезка, луча, прямой, треугольника и доказать теоремы, относящиеся к промежуточности. Далее рассматривается и доказывается задача Сильвестра. На основании приведенного выше определяются плоскость, угол, выпуклая, угловая и треугольная области и другие определения и утверждения, позволяющие определить пространство и гиперплоскость. Также в работе рассматриваются аксиома непрерывности и теоремы, позволяющие говорить о "параллельности".

Краткое содержание работы:

В **Параграфе 1** для начала приводятся аксиомы, которые позволяют ввести первоначальное отношение — тернарное отношение промежуточности.

Аксиома 1.1. Существуют, по крайне мере, две точки.

Аксиома 1.2. Если A и B — две различные точки, то существует, по крайней мере, одна такая точка С, что $[ABC]$.

Аксиома 1.3. Если $[ABC]$, то A и C различны: $A \neq C$.

Аксиома 1.4. Если $[ABC]$, то $[CBA]$, но не $[BCA]$.

Отношение промежуточности есть тернарное отношение, т. е. подмножество $S \subset X \times X \times X$, которое означает, что B лежит между A и C. Обозначим $[ABC]$.

На основании уже известных сведений приводятся простейшие теоремы, которые позволяют ввести определения интервала, отрезка, луча и прямой. Также приводятся аксиомы и утверждения, позволяющие определить треугольник, и следующие из этого определения.

Аксиома 1.5. Если C и D — различные точки прямой AB, то A принадлежит прямой CD.

Теорема 1.5. Если C и D — различные точки прямой AB, то прямая AB

совпадает с прямой CD.

Аксиома 1.6. Какова бы ни была прямая AB, существует точка C, не принадлежащая этой прямой.

Аксиома 1.7. Если ABC — треугольник и $[BCD]$ и $[CEA]$, то на прямой

DE существует такая точка F, что $[AFB]$.

Определение 1.6. Если $[ABC]$ и $[ACD]$, то пишется $[ABCD]$.

Параграф 2 посвящен гипотезе Сильвестра о неколлинеарных точках.

Теорема 2.1. Если n точек коллинеарны, то существует, по крайней мере, одна прямая, проходящая в точности через две из этих точек.

В предыдущем параграфе удалось продвинуть плоскую геометрию достаточно далеко, не определяя самого понятия плоскости, но в **Параграфе 3** это уже необходимо.

Определение 3.1. Если A, B, C — три неколлинеарные точки, то плоскостью ABC называется множество точек, коллинеарных парам точек, принадлежащих одной или двум сторонам треугольника ABC. Говорят, что отрезок, интервал, луч и прямая лежат в плоскости, если все их точки принадлежат плоскости.

Как было замечено в **Параграфе 1**, произвольная точка O, принадлежащая прямой, разбивает ее на два луча, скажем a_1 и a_2. Любая другая прямая b, проходящая через O, также разбивается этой точкой на два луча b_1 и b_2 по одному в каждой из полуплоскостей, определяемых прямой a. Каждый из этих лучей разбивает полуплоскость, в которой он лежит на две угловые области. Таким образом, две пересекающиеся прямые a и b разбивают плоскость на четыре угловые области, ограниченные углами

$$a_1b_1,\ b_1a_2,\ a_2b_2,\ b_2a_1.$$

Утверждение 3.1. Если ABC и $A'B'C'$ — две тройки коллинеарных точек, такие, что три прямые AA', BB', CC' не пересекаются, то из $[ACB]$ следует $[A'C'B']$.

Аналогичное рассмотрение угловых областей даёт следующую теорему:

Теорема 3.2. Если ABC и $A'B'C'$ — две тройки коллинеарных точек, такие, что три прямые AA', BB', CC' имеют общую точку O, которая лежит между A и A', или между B и B', или между C и C', то из $[ACB]$ следует $[A'C'B']$.

Для того, чтобы определить размерность рассматриваемого пространства, необходимо дополнительно ввести одну или несколько аксиом. Если нас удовлетворяют два измерения, мы полагаем:

Аксиома 3.1. Все точки лежат в одной плоскости.

В противном случае заменяем эту аксиому такой:

Аксиома 3.2. Если ABC — плоскость, то существует точка D, не принадлежащая этой плоскости.

В этом случае мы определяем тетраэдр $ABCD$.

Это позволяет вывести известные свойства инцидентности прямых и плоскостей в пространстве.

Аксиома 3.3. Все точки принадлежат одному пространству.

Аксиома 3.4. Если $A_0A_1A_2A_3$ — трехмерное пространство, то существует точка A_4, не принадлежащая ему.

Теперь ясна возможность распространения наших построений на случай пространства n измерений (с помощью математической индукции). n-мерное пространство $A_0A_1 \dots A_n$ разбивается на две выпуклые области (полупространства) $(n-1)$- мерным подпространством (например, $A_0A_1 \dots A_{n-1}$), называемым гиперплоскостью (или "$(n-1)$-плоскостью").

В **Параграфе 4** для начала представлена аксиома Дедекинда о непрерывности.

Аксиома 4.1. При любом разбиении всех точек прямой на два непустых множества, обладающих тем свойством, что точка одного множества не может лежать между двумя точками другого, в одном из множеств существует точка, лежащая между всеми остальными точками этого множества и всеми точками другого множества.

Идею о существовании проходящих через данную точку двух лучей, параллельных данной прямой (в противоположных направлениях), независимо друг от друга развили Гаусс, Бойяи и Лобачевский.

Теорема 4.1. Для любой точки A и любой прямой r, не проходящей через A, существуют ровно два луча (на плоскости Ar), которые выходят из точки A, не пересекают прямую r и при этом отделяют лучи, которые выходят из A и пересекают r, от лучей, которые не пересекают r.

Определение 4.1. Говорят, что два луча имеют одинаковое направление, если они лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начальные точки.

Другим известным свойством параллельности является ”независимость от выбора начала луча”:

Теорема 4.2. Прямая и луч остаются параллельными, если перенести начало луча в другую точку той же прямой (т. е. отнять от луча или прибавить к нему отрезок).

Далее формулируем теорему, которая является важным шагом на пути к доказательству транзитивности:

Теорема 4.3. Если две прямые p и r параллельны третьей прямой s в одном направлении, то существует прямая, пересекающая все три прямые.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Так, точка и прямая — это объекты геометрии, а то, что точка принадлежит прямой, — отношение между ними. Все вновь возникающие понятия должны быть определены через основные понятия и понятия, определенные ранее. Формулируются аксиомы — предложения, принимаемые без доказательства. Все остальные предложения должны являться логическим следствием аксиом или ранее доказанных утверждений.

Мы рассмотрели аксиомы порядка, теоремы и определения, следующие из них и составляющие общий фундамент аффинной и абсолютной геометрий. Мы показали, что, используя отношение промежуточности, возможно последовательно выстроить полноценную геометрию и развить ее.

Для более удобного восприятия мы определяли все применяемые нами понятия (за исключениям первоначальных) и доказывали все утверждения, какими бы “очевидными” они ни казались.