Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Построение обобщенного критерия в задачах многокритериальной оптимизации

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

Механико-математический факультет
наименование факультета, института, колледжа

БЕЗРУКОВА АЛЕКСАНДРА ВЛАДИМИРОВИЧА
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

До недавнего времени задачи принятия решения решались на интуитивном уровне. Такие задачи часто встречаются в экономике, в политике, а также в повседневной жизни. Несколько десятков лет назад появилась теория принятия решений. В ней рассматриваются задачи наилучшего выбора из заданного множества альтернатив. Эта теория помогает сделать выбор обоснованно, эффективно используя имеющуюся в наличии информацию о целях и предпочтениях лица, принимающего решение (ЛПР).

Данная работа посвящена многокритериальной оптимизации, то есть принятие решения по нескольким критериям.

Впервые проблема многокритериальной (векторной) оптимизации была исследована итальянским экономистом и социологом Вильфредо Парето (1848-1923) при математическом исследовании товарного объёма. В дальнейшем интерес к проблеме векторной оптимизации усилился в связи с разработкой и широким использованием вычислительной техники в работах экономистов-математиков. Позднее стало ясно, что многокритериальные задачи возникают не только в экономике, но и в технике, в военном деле и т.д.

На практике анализ решений при многих критериях обычно сводится к взаимодействию аналитике с лицом принимающим решение, которое несет ответственность за принятие решения. Однако, существует довольно ограниченная область, в которой применение сугубо формального анализа без обращения к лицу принимающего решение оказывается весьма полезным. Речь идет о выделении так называемого множества эффективных, или оптимальных по Парето альтернатив. Эффективной считается такая альтернатива, для которой не существует другой допустимой, не уступающей ей по всем критериям и хотя бы по одному критерию превосходящей ее.

Применение математических методов при принятии решений предполагает построение подходящей математической модели, формализовано представляющей проблемную ситуацию, в которой требуется сделать выбор наилучшей альтернативы. Для задач принятия решений (задач оптимизации) в условиях определенности, когда случайные и неопределенные факторы отсутствуют, компонентами такой модели являются множество всех допустимых решений, из которых и делается выбор одного – наилучшего, или оптимального решения. Для того чтобы была обеспечена возможность выбора, множество выбора должно содержать не менее двух альтернатив, иначе надобность в принятии решения отпадает.

Целью данной работы является краткий обзор результатов, касающихся математических моделей принятия решения при наличии многих критериев. Работа состоит из двух разделов. Первый раздел посвящен описанию математических моделей принятия решений. В частности в нем рассмотрены различные способы выбора единственного решения из множества эффективных решений, основанные на сужении паретовского оптимума.

Во втором разделе обсуждаются проблемы, связанные с построением так называемого обобщенного критерия. В частности, обобщенный критерий может быть построен с помощью метода взвешенной суммы. Показано, что в общем случае обобщенный критерий может быть построен с помощью задания локального коэффициента замещения или карты безразличий в области векторных оценок.

В данной работе рассматриваются в качестве примеров несколько типичных задач экономического моделирования. Например, задача об оптимальном выборе при покупке товара; задача об оптимизации производственного процесса; задача сравнения объектов по предпочтительности; задача оптимизации производственного процесса.

Относительно приведенных здесь примеров экономических задач следует иметь в виду, что они носят иллюстративный или даже схематический характер. Это связано с тем обстоятельством, что для построения адекватных моделей реальных задач принятия решений в экономике требуется большой объем данных и сами эти модели являются весьма громоздкими. Вместе с тем проследить основные этапы анализа, логику рассуждений и применение математического аппарата гораздо легче на упрощенных моделях.

Краткое содержание работы:

Раздел 1 посвящен принятию решений на основе принципа оптимальности по Парето. Вначале строится математическая модель принятия решений по нескольким критериям, вводится понятие множества векторных оценок и указывается правило сравнения векторных оценок. Основное отношение, по которому производится сравнение векторных оценок — это отношение доминирования по Парето (определение 1.1). Доказывается принципиальное утверждение (утверждение 1.2) о том, что отношение доминирования по Парето на множестве векторных оценок является отношением порядка. Дается определение Парето-оптимальной (эффективной) векторной оценки (определение 1.2).

В подразделе Парето-оптимальность исходов, понятия доминирование по Парето и Парето-оптимальность переносятся на множество исходов D (определения 1.3-1.4). Парето-оптимальность исхода $a^* \in D$ означает, что он не может быть улучшен ни по одному из критериев без ухудшения по какому-нибудь другому критерию. Приведен пример 1, в котором наглядно изображено доминирование по Парето и Парето-оптимальное множество в зависимости от характера критериев (позитивные или негативные). Из примера 1 видно, что Парето-оптимальных исходов может быть несколько, а в случае непрерывной области D – бесконечное множество. Дать однозначный ответ на вопрос, какой же из Парето-оптимальных исходов считать наилучшим, для общего случая, не имея дополнительной информации о критериях, невозможно.

В завершение данного раздела указаны важнейшие методы сужения Парето-оптимального множества (паретовского оптимума).

а) *Указание нижних границ критериев.*

При указании нижних границ критериев оптимальным может считаться только такой Парето–оптимальный исход, для которого оценка по каждому критерию $j = \overline{1,m}$ не ниже назначенной оценки γ_j. Таким образом, происходит сужение Парето–оптимального множества за счет условия (1.1). При увеличении значений γ_j $(j = \overline{1,m})$ Парето–оптимальное множество сокращается. Окончательный выбор Парето–оптимального исхода производится из суженного паретовского оптимума лицом, принимающим решение, на основе субъективных соображений.

б) *Субоптимизация*

В этом случае выделяют один из критериев, а по всем остальным критериям назначают нижние границы. Оптимальным при этом считается исход, максимизирующий выделенный критерий на множестве тех исходов, оценки которых по остальным критериям не ниже назначенных. Таким образом, с помощью метода субоптимизации задача многокритериальной оптимизации превращается в задачу скалярной оптимизации на суженном допустимом множестве. Выделение одного из критериев, а также указание нижних границ для остальных критериев основано на дополнительной информации, получаемой от лица, принимающего решение. Следовательно, окончательное решение здесь также носит субъективный характер.

в) *Лексикографическая оптимизация*

Данный метод основан на полном упорядочении критериев по их относительной важности. После этого процедура нахождения оптимального решения проводится следующим образом. На первом шаге отбираются те исходы, которые имеют максимальную оценку по важнейшему критерию. Если такой исход единственный, то он и считается оптимальным. Если же таких исходов несколько, то среди них отбираются те, которые имеют максимальную оценку по следующему за важнейшим критерию и т.д. В результате такой процедуры всегда остается (в случае конечного числа исходов) единственный исход — он и считается оптимальным.

В качестве демонстрации методов нахождения оптимального решения в многокритериальных задачах принятия решений приводится пример 2.

Раздел 2 полностью посвящен построению обобщенного критерия в задачах принятия решений с многими критериями (задачах многокритериальной оптимизации). Вначале вводятся понятия обобщенного критерия (на примере задачи принятия решения с двумя критериями u, v) и эквивалентность обобщенных критериев. Далее рассматривается метод взвешенной суммы частных критериев, основанный на свертывании всех критериев в один обобщенный критерий. Этот метод превращает векторную оценку $y = (y_1, \ldots, y_m)$ в скалярную оценку

$$\varphi(y) = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m,$$

где $\alpha_j \geq 0$, $j = \overline{1, m}$. Иногда дополнительно требуют, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$. Числа α_j называют в этом случае *весовыми коэффициентами*. При этом весовой коэффициент α_j интерпретируется как показатель относительной важности j–го критерия: чем больше α_j, тем больший вклад дает оценка по j–му критерию в итоговую оценку $\varphi(y)$.

Далее устанавливается правило 2, состоящее в следующем: если векторная оценка $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ доставляет максимум функции $\varphi(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$, где все $\alpha_j > 0$, то векторная оценка y^* является Парето–оптимальной в множестве Q.

Для выпуклой области Q имеет место и обратное утверждение, а именно, выполняется правило 3 : пусть $Q \subseteq Y$, $y^* \in Q$ — Парето–оптимальная векторная оценка в Q. Тогда найдутся такие неотрицательные числа $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, что функция $\varphi(y) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$ достигает максимума на множестве Q в точке y^*).

Правила 2 и 3 указывают способ перебора Парето оптимальных точек заданного множества Q: зафиксировав положительный вектор весов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и найдя максимум взвешенной суммы $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$, получаем некоторую точку Парето–оптимального множества. В случае выпуклого множества Q все Парето–оптимальные точки множества могут быть получены таким способом при некоторых $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, m}$.

В качестве примера рассматривается экономическая задача оптимизации производственного процесса. В этом примере вводится понятия вектора затрат-выпуска и производственного множества. Доказывается утверждение 2.2, состоящее о том, что всякий вектор затрат-выпусков
$(x^*, y^*) = (-x_1^*, \ldots, -x_n^*, y_1^*, \ldots, y_m^*)$, который доставляет на производствен-

ное множество T максимум целевой функции

$$\varphi(x,y) = (\alpha,x) + (\beta,y) = (\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m) - (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \\ = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,$$

является Парето-оптимальным.
При этом, если производственное множество T является выпуклым, то справедливо обратное утверждение 2.3.

Далее изучается проблема дополнительной информации, которая требуется для построения обобщенного критерия. Здесь центральными являются понятия локального коэффициента замещения и карты безразличий. В терминах этих понятий формулируется правило 5, состоящее в том, что задание в области Q карты безразличий равносильно заданию локального коэффициента замещения для каждой точке $M \in Q$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.7. 1) *Предположим, что карта безразличий K задана в области векторных оценок уравнением $\Phi(u,v,c) = 0$, где c - параметр. Тогда неявная функция $c = c(u,v)$, определенная уравнением $\Phi(u,v,c) = 0$, является обобщенным критерием, совместимым с картой K;*

2) *Для того чтобы функция $\varphi = \varphi(u,v)$ была обобщенным критерием, совместимым с картой K, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид: $\varphi = \lambda \circ c$, где λ — монотонно возрастающая функция одной переменной.*

На основании теоремы 2.7 получаем важное следствие 2.8: *если два обобщенных критерия, совместимых с картой K, тогда эти критерии эквивалентны.*

Верно и обратное утверждение: *если обобщенные критерии φ_1 и φ_2 эквивалентны, то для них карты безразличий совпадают и оба они будут совместимыми с этой общей для них картой.*

Итак, приходим к следующему принципиальному выводу:
карта безразличий определяет обобщенный критерий с точностью до эквивалентности (правило 7). Таким образом, дополнительная информация относительно частных критериев, которая требуется для построения в области

Q обобщенного критерия, определенного с точностью до эквивалентности, состоит в задании в этой области карты безразличий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа содержит обзор важнейших сведений о математических моделях принятия решений и методах нахождения оптимальных решений в задачах многокритериальной оптимизациии.

В работе рассмотрены и исследованы следующие основные темы:

- математические модели задач многокритериальной оптимизации;
- принцип оптимальности по Парето;
- свойства паретовского оптимума;
- методы сужения Парето-оптимального множества;
- построение обобщенного критерия;
- метод взвешенных сумм;
- понятия кривой безразличия и карты в области векторных оценок;
- понятие локального коэффициента замещения.

Важнейшим понятием, вводимым для многокритериальных задач, является отношение *доминирования по Парето* $\overset{Par}{>}$. Условие $a_1 \overset{Par}{>} a_2$ содержательно означает, что исход a_1 не хуже, чем исход a_2 по любому из рассматриваемых критериев, причем, по крайней мере, по одному из критериев a_1 лучше, чем a_2.

Исход $a^* \in D$ называется *Парето–оптимальным*, если он не доминируется по Парето никаким исходом из множества D.

Необходимым условием оптимальности решения является его оптимальность по Парето.

Для многокритериальных задач принятия решений проблема выбора единственного оптимального решения может быть решена только при получении от лица, принимающего решение, дополнительной информации о соотношении критериев между собой. Наиболее "емкой" здесь является информация о величине так называемого локального коэффициента замещения. Для задачи принятия решений с двумя критериями локальный коэффициент замещения указывает величину прибавки по одному критерию, которая компенсирует для принимающего решение потерю единицы по другому критерию. Зная локальный коэффициент замещения в каждой точке области векторных оценок, можно построить в этой области карту безразличий, состоящую из кривых безразличия.

Основной результат работы фактически состоит в том, что задание в области векторных оценок карты безразличий или локального коэффициента замещения определяет полное упорядочивание множества векторных оценок, что приводит к единственному оптимальному решению.