Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа
и автоматического управления

Анализ неоднородных сетей массового обслуживания
с экспоненциальными этапами обслуживания
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы
направления 02.03.02 – Фундаментальная информатика и информационные технологии
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Скачковой Ольги Витальевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент Н.П. Фокина

Заведующий кафедрой
д. т. н., профессор Ю.И. Митрофанов

Саратов 2016

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Методы теории массового обслуживания ориентированы на анализ систем и сетей массового обслуживания: математическая формализация процессов функционирования систем массового обслуживания (СМО) и сетей массового обслуживания (СеМО), получение математических выражений для характеристик их математических моделей, объяснение причин специфических явлений при функционировании исследуемых систем и сетей.

Примерами таких систем являются гибкие производственные системы, информационно-вычислительные сети, сети передачи данных, транспортные сети. Как модели дискретных систем сети обслуживания используются для вычисления временных характеристик, коэффициентов использования устройств, надежности, производительности и других функциональных параметров дискретных систем при достаточно общих предположениях об их структурах и процессах функционирования.

Практическому применению СеМО способствуют простота и естественность, с которыми они отображают структуры моделируемых систем и процессы обработки в системах объектов различных типов, наличие фундаментальных теоретических результатов и достаточно эффективных вычислительных алгоритмов, а также накопленный опыт использования моделей в виде сетей обслуживания при решении практических задач исследования дискретных систем.

Цель работы.

1. Изучение неоднородных замкнутых сетей массового обслуживания с экспоненциальными этапами обслуживания.
2. Разработка алгоритма анализа неоднородных замкнутых сетей массового обслуживания с экспоненциальными этапами обслуживания.
3. Программная реализация алгоритма вычисления стационарных вероятностей состояний.
4. Проведение численных экспериментов с программой.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, одиннадцати разделов и заключения. Объем бакалаврской работы без приложений – 40 страниц. Работа содержит 1 таблицу. Список литературы включает 10 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит общую характеристику работы.

В **первом разделе** содержится описание назначения сетей массового обслуживания и их классификация.

Во **втором разделе** описываются однородные замкнутые сети массового обслуживания.

В **третьем разделе** рассматривается неоднородная сеть массового обслуживания с L системами массового обслуживания, *К* классами требований и маршрутной матрицей $\Theta = (\theta_{ik,jl})$, которая может рассматриваться как матрица вероятностей перехода цепи Маркова, состояния которой определены парами (i, k). Предполагается, что цепь Маркова разложима на R эргодических подцепей. Пусть $E_1, E_2 \dots E_R$ являются множествами состояний каждой из этих подцепей, пусть ζ - состояние сети, а n_{ik} - число требований класса k в системе C_i, когда сеть находится в состоянии ζ, $Q_r(\zeta) = \sum_{(i,k)\epsilon E_r} n_{ik}$. Тогда для замкнутой СеМО справедливо равенство $Q_r(\zeta) = const$, $1 \le r \le R$ [4].

Системы массового обслуживания в сети относятся к одному из четырех типов в зависимости от своих характеристик:

1. В СМО первого типа дисциплина обслуживания - *FCFS* и требования всех классов имеют одну и ту же экспоненциальную функцию распределения длительности обслуживания. Интенсивность обслуживания может зависеть от состояния системы и в этом случае будет обозначаться через $\mu(m)$, когда в системе находится m требований.

2. В СМО второго типа имеется только один обслуживающий прибор, дисциплина обслуживания - *PS,* различные классы требований могут иметь различные функции распределения длительности обслуживания требований. Функции распределения длительности обслуживания должны иметь рациональное преобразование Лапласа.

3. В СМО третьего типа число обслуживающих приборов в СМО больше или равно максимальному числу требований, которые могут находиться в этой СМО, дисциплина обслуживания - *IS,* различные классы требований могут иметь различные функции распределения длительности обслуживания. Функции распределения длительности обслуживания должны иметь рациональное преобразование Лапласа.

4. В СМО четвертого типа имеется один обслуживающий прибор, дисциплина обслуживания - *LCFSPR,* различные классы требований могут иметь различные функции распределения длительности обслуживания. Функции распределения длительности обслуживания должны иметь рациональное преобразование Лапласа.

Экспоненциальное, гиперэкспоненциальное распределения и распределение Эрланга имеют рациональное преобразование Лапласа [8]. Известно, что любое распределение с рациональным преобразованием Лапласа может быть представлено последовательностью экспоненциальных этапов

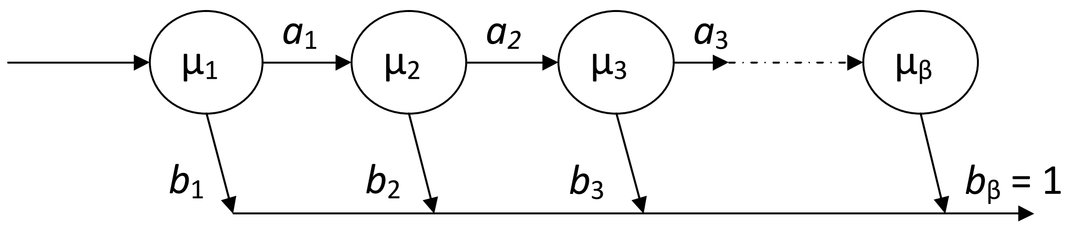

Рисунок 1- Представление распределений длительности обслуживания методом этапов.

На рис. 1 b_q - вероятность того, что требование завершит обслуживание после q-го этапа (и покинет СМО) и $a_q = (1 - b_q)$- вероятность того, что требование перейдет к следующему этапу обслуживания. При условии, что требование достигает *q-го* этапа, длительность обслуживания на этом этапе имеет экспоненциальное распределение с математическим ожиданием $1/\mu_q$. Так как распределение длительности обслуживания на этапе является экспоненциальным, то при описании состояния сети обслуживания отсутствует необходимость в знании точного объема обслуживания, которое требование получило в системе обслуживания; достаточно знать номер этапа обслуживания.

Состояние сети обслуживания описывается вектором $\zeta = (\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \dots, \zeta_{in_i})$, где n_i отображает состояние системы обслуживания C_i. Интерпретация ζ_i зависит от типа СМО C_i.

Если СМО C_i *первого* типа, то $\zeta_i = (\zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \dots, \zeta_{in_i})$, где n_i - число требований в системе C_i, а $\zeta_{im}(1 \le m \le n_i, 1 \le \zeta_{im} \le K)$ - класс требования, которое является *m*-м в очереди по порядку (место в очереди определяется порядком поступления, так как в СМО этого типа дисциплина обслуживания - *FCFS).* Первое требование в очереди обслуживается, в то время как остальные требования в очереди ожидают обслуживания.

Если СМО C_i *второго* или *третьего* типа, то $\zeta_i = (\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i})$, где η_{iK} – вектор $(\chi_{1k}, \chi_{2k}, \dots, \chi_{\beta_{ik}k}$), q-я компонента вектора η_{ik} есть число требований класса k в СМО C_i, находящихся на *q-м* этапе обслуживания, β_{ik} - число этапов обслуживания требований класса k в СМО C_i.

Если СМО C_i *четвертого* типа, то $\zeta_i = ((k_1\gamma_1), (k_2\gamma_2), \dots, (k_{n_i}\gamma_{n_i}))$, где n_i- число требований в C_i, а $(k_m\gamma_m)$ - пара, описывающая *m*-е требование в очереди, образованной в соответствии с дисциплиной *LCFSPR,* k_m- класс этого требования, а $\gamma_m -$этап обслуживания, на котором находится данное требование [5].

В **четвертом разделе** рассматриваются уравнения равновесия неоднородной сети и их решение.

Решение, полученное для стационарных вероятностей состояний, должно удовлетворять уравнениям глобального равновесия для сети обслуживания. Так что

$$\sum_{\substack{\text{все состояния} \\ \zeta^v}} P(\zeta^v)[\text{интенсивность потока переходов из } \zeta^v \text{в } \zeta^u] =$$

$$= P(\zeta^u)\ [\text{интенсивность потока выходов из } \zeta^u], \quad \text{все состояния } \zeta^u.$$

Совместно с уравнениями глобального равновесия для описания эволюции сети в стационарном режиме могут быть использованы уравнения локального равновесия. Уравнение локального равновесия приравнивает интенсивность переходов сети в некоторое состояние за счет входа требований в некоторый этап обслуживания интенсивности переходов сети из этого состояния за счет выхода требований из данного этапа обслуживания. Предполагается, что каждое требование связано с некоторым этапом обслуживания. Если требование находится в СМО в процессе обслуживания, то оно находится на одном из этапов распределения его длительности обслуживания в данной СМО. Каждое уравнение глобального равновесия является суммой уравнений локального равновесия. Следовательно, уравнения локального равновесия являются достаточными условиями для глобального равновесия (но не являются необходимыми).

Во многих случаях уравнения локального равновесия являются несовместными и, следовательно, не имеют решения. Например, если в системе обслуживания в сети реализована дисциплина *FCFS* и различные классы требований имеют различные распределения длительности обслуживания, то уравнения локального равновесия являются несовместными.

Для каждой эргодической подцепи E_r определим следующее множество уравнений:

$$\sum_{(i,k)\epsilon E_r} \sigma_{ik}\theta_{ik,jl} + \hat{v}_{jl} = \sigma_{jl}, \quad (j,l)\epsilon E_r.$$

Значение $\hat{v}_{jl}$ есть интенсивность потока требований класса l из источника в СМО C_j. Если $\hat{v}_{jl} = 0 \;\; \forall (j,l)\epsilon E_r$, то сеть является замкнутой по отношению к E_r. В этом случае σ_{ik} определяются с точностью до мультипликативной константы. Величина σ_{ik} может пониматься как относительная интенсивность поступления требований класса k в систему C_i. Если не все $\hat{v}_{jl} = 0$, для $(j,l)\epsilon E_r$, то для σ_{ik} существует единственное решение. В этом случае σ_{ik} есть абсолютная интенсивность поступления требований класса k в систему обслуживания C_i. Сеть может быть открытой по отношению к одним классам требований и замкнутой по отношению к другим классам требований. Будем считать также, что если в СМО C_i требования класса k имеют распределение длительности обслуживания, которое представляется как сеть этапов обслуживания, то оно представляется в виде, показанном на рис. 2. Первый индекс у а, b и μ обозначает систему обслуживания; второй индекс - класс требования; третий индекс - этап обслуживания [9].

$$A_{ikq} = \prod_{m=1}^{q} a_{ikm}.$$

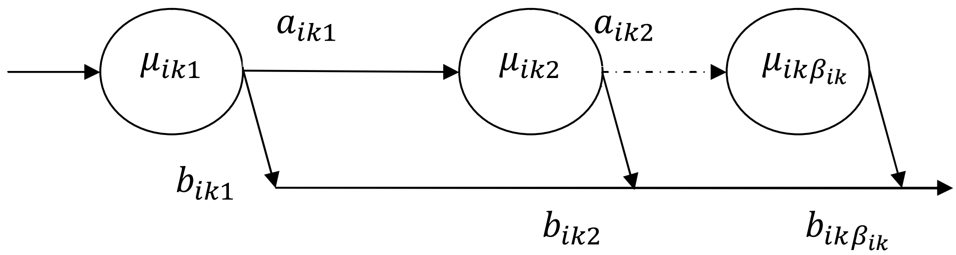

Рисунок 2 - Представление распределения длительности обслуживания требования класса k в системе обслуживания C_i.

Теорема (BCMP) [3]. Для сети массового обслуживания, которая является открытой, замкнутой или смешанной, и каждая система обслуживания в которой является 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типа, стационарные вероятности состояний определяются выражением

$$\mathrm{P}(\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_L)) = \tilde{G} d(\zeta) f_1(\zeta_1) f_2(\zeta_2) \dots f_L(\zeta_L),$$

где $\tilde{G}$ является нормализующей константой, выбранной так, чтобы сумма стационарных вероятностей состояний равнялась 1, $d(\zeta)$ является функцией числа требований в сети, а каждая f_i является функцией, которая зависит от типа системы обслуживания C_i.

Если система C_i типа 1, то

$$f_i(\zeta_i) = \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{n_i} \prod_{m=1}^{n_i} \sigma_{i\zeta_{im}}$$

Если система C_i типа 2, то

$$f_i(\zeta_i) = n_i! \prod_{k=1}^{K} \prod_{q=1}^{\beta_{ik}} \left(\frac{1}{\chi_{ikq}!} \left(\frac{\sigma_{ik} A_{ikq}}{\mu_{ikq}} \right)^{\chi_{ikq}} \right).$$

Если система C_i типа 3, то

$$f_i(\zeta_i) = \prod_{k=1}^{K} \prod_{q=1}^{\beta_{ik}} \left(\frac{1}{\chi_{ikq}!} \left(\frac{\sigma_{ik} A_{ikq}}{\mu_{ikq}} \right)^{\chi_{ikq}} \right).$$

Если система C_i типа 4, то

$$f_i(\zeta_i) = \prod_{m=1}^{n_i} \frac{\sigma_{ik_m} A_{ik_m\gamma_m}}{\mu_{ik_m\gamma_m}},$$

где

$$A_{ikq} = \prod_{m=1}^{q} a_{ikm}.$$

Если интенсивность поступления требований в сеть из источника зависит от общего числа требований в сети обслуживания $Q(\zeta)$, и требования класса k поступают из источника в систему C_i, с фиксированной вероятностью p_{ik}, то

$$d(\zeta) = \prod_{m=0}^{Q(\zeta)-1} \lambda(m)$$

Если сеть замкнута, то $d(\zeta) = 1$.

В **пятом разделе** описываются стационарные распределения вероятностей агрегированных состояний сетей обслуживания.

Определим агрегированное состояние сети обслуживания вектором $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_L)$, где $\zeta_i = (n_{i1}, n_{i2}, \dots, n_{iK})$, и n_{ik} является числом требований класса k в системе C_i. Используем обозначения: n_i - общее число требований в системе C_i, $1/\mu_{ik}$ - математическое ожидание длительности обслуживания требований класса k в системе C_i.

Если процесса поступления требований из источника в сеть зависит от состояния, то

$$\mathrm{d}(\zeta) = \prod_{r=1}^{R} \prod_{m=0}^{Q_r(\zeta)-1} \lambda_r(m).$$

Тогда стационарные вероятности состояний сети определяются выражением

$$\mathrm{P}\big(\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_L)\big) = \tilde{G} d(\zeta) g_1(\zeta_1) g_2(\zeta_2) \dots g_L(\zeta_L),$$

где,

если система C_i типа 1, то

$$g_i(\zeta_i) = n_i! \frac{1}{\mu_i^{n_i}} \prod_{k=1}^{K} \frac{\sigma_{ik}^{n_{ik}}}{n_{ik}!} \tag{1}$$

если система C_i типа 2 или 4, то

$$g_i(\zeta_i) = n_i! \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{n_{ik}!} \left(\frac{\sigma_{ik}}{\mu_{ik}}\right)^{n_{ik}} \tag{2}$$

если система C_i типа 3, то

$$g_i(\zeta_i) = \prod_{k=1}^{K} \frac{1}{n_{ik}!} \left(\frac{\sigma_{ik}}{\mu_{ik}}\right)^{n_{ik}} \tag{3}$$

Если интенсивность обслуживания в системе C_i является одинаковой для всех классов требований, но зависит от числа требований в системе обслуживания, то множитель $\prod_{k=1}^{K} \left(\frac{1}{\mu_{ik}}\right)^{n_{ik}}$ заменяется на $\prod_{m=1}^{n_i} \frac{m}{\mu_i(m)}$, где $\mu_i(m)$ есть интенсивность обслуживания в системе C_i, когда в этой системе находится *m* требований [3].

В **шестом** и **седьмом разделах** содержится алгоритм, реализующий нахождение стационарных вероятностей состояний неоднородной сети согласно теореме BCMP и блок-схема алгоритма соответственно.

Рассматривается неоднородная замкнутая экспоненциальная СеМО с L системами массового обслуживания и двумя классами требований. Предполагается, что каждая система сети имеет один прибор и при переходе требований между системами их класс не меняется. Таким образом, в сети всегда находится постоянное число требований каждого класса N_i, $i = 1,2$. Всего в сети находится $Q = N_1 + N_2$ требований. Маршрутизация требований класса k определяется маршрутной матрицей $\Theta^{(k)} = (\theta_{ij}^{(k)})$, $k = 1,\ 2$. Алгоритм, реализующий метод анализа данной неоднородной замкнутой сети, содержит следующие этапы:

1. Формирование пространства состояний неоднородной сети рекурсивным методом.

2. Решение системы уравнений потоков для k - требований, $k = 1{,}2$:

$$\sum_{i=1}^{L} \sigma_i^{(k)} \theta_{ij}^{(k)} = \sigma_j^{(k)}, j = 1, \ldots, L,$$

с условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{L} \sigma_i^{(k)} = 1.$$

Данная система уравнений решается методом Гаусса. Здесь $\sigma_i^{(k)}$- относительная интенсивность потока требований класса k, поступающих в систему C_i.

3. Вычисление стационарных вероятностей

$$P(\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_L)) = \tilde{G} g_1(\zeta_1) g_2(\zeta_2) \ldots g_L(\zeta_L),$$

где $\zeta_i = (n_{i1}, n_{i2}, \ldots, n_{iK})$, и n_{ik} является числом требований класса k в системе C_i. Для вычисления стационарных вероятностей выполняются следующие шаги:

a) Подсчет g_i для каждого состояния ζ_i по формуле

$$g_i(\zeta_i) = n_i! \frac{1}{\mu_i^{n_i}} \prod_{k=1}^{K} \frac{\sigma_{ik}^{n_{ik}}}{n_{ik}!}$$

b) $\tilde{P}(\zeta_i) = \prod_{i=1}^{L} g_i(\zeta_i)$

c) $\tilde{G} = \frac{1}{\sum \tilde{P}(\zeta_i)}$.

Разделы восемь, десять и одиннадцать посвящены разработанной программе. В них содержится описание и назначение программы, приводится список основных идентификаторов, а также описание и назначение функциональных блоков программы.

В **разделе 9** приводятся результаты тестового примера, иллюстрирующие работу программы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе изучены неоднородные замкнутые экспоненциальные сети массового обслуживания с экспоненциальными этапами обслуживания. Основным известным результатом, используемым в данной работе, для данных сетей обслуживания является теорема BCMP, в которой приводится мультипликативная форма стационарных вероятностей состояний. Разработан алгоритм вычисления стационарных вероятностей состояний и написана программа на языке C#. Программа отлажена на тестовом примере. В качестве примера в бакалаврской работе представлены результаты тестирования программы для сети с четырьмя системами и 2 классами требований. Среда разработки Visual Studio 2010. Программа работает в соответствии с разработанным алгоритмом функционирования, выдает сообщения об ошибках при неверно заданных исходных данных, поддерживает диалоговый режим в рамках предоставляемых пользователю возможностей. Входные и выходные данные хранятся в текстовых файлах. Для корректной работы программы необходима любая операционная система Windows.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Хинчин, А. Я. Математические методы теории массового обслуживания/ А.Я. Хинчин. – М.: Либриком, 2010. 240 с.

2 Лабскер, Л.Г., Бабешко, Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере/ Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: ЮНИТИ, 1998. 319 с.

3 Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания/ Ю.И. Митрофанов: Учебное пособие. – Саратов: Научная книга, 2005. 175 с.

4 Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания/ Л. Клейнрок; Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1979. 432 с.

5 Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания/ Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. М.: Высш. школа, 1982. 256 с.

6 Кофман, А. Массовое обслуживание. Теория и приложения / А. Кофман, Р. Крюон; Пер. с фран. – М.: Мир, 1965. 303 с.

7 Башарин, Г.П. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета/ Г.П. Башарин, П.П. Бочаров, Я.А. Коган; М.: Наука, ГРФМЛ, 1989. 336 с.

8 Бочаров, П.П. Теория массового обслуживания: Учебное пособие/ П.П. Бочаров, А.В. Печинкин; М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.

9 Матвеев, В.Ф. Системы массового обслуживания/ В.Ф. Матвеев, В.Г. Ушаков; М.: Изд-во МГУ, 1984. 240 с.

10 Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: Учебное пособие для вузов/ А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. Томск: НТЛ, 2004. 228 с.