Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и
автоматического управления

АНАЛИЗ НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ МЕТОДОМ ЭТАПОВ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы
направления 02.03.02 — Фундаментальная информатика и информационные технологии
факультета КНиИТ
Белоусовой Дарьи Николаевны

Научный руководитель
д. т. н., профессор ______________ Ю. И. Митрофанов

Заведующий кафедрой
д. т. н., профессор ______________ Ю. И. Митрофанов

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания является областью прикладной математики, связанной с построением и исследованием математических моделей определенного класса дискретных систем со стохастическим характером функционирования. Назначением принадлежащих к этому классу систем является обслуживание поступающих в системы объектов, называемых требованиями.

В дипломной работе рассматривается система массового обслуживания, в которой длительность обслуживания на приборе имеет распределение Эрланга порядка r.

Целью работы является исследование неэкспоненциальных систем массового обслуживания методом этапов, разработка алгоритма метода этапов, программная реализация алгоритма и проведение численных экспериментов с помощью разработанной программы.

Дипломная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка источников и приложения.

В первой главе представлены основные понятия массового обслуживания. Рассмотрены некоторые распределения случайных величин, введены основные параметры и характеристики систем обслуживания.

Во второй главе представлены уравнения равновесия, в основе которых лежат равенства интенсивностей потока переходов в некоторое состояние и потока перехода из этого состояния, а также применение принципа сохранения потока к каждому состоянию системы. Рассмотрен метод этапов для анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания. Описана система массового обслуживания типа $M/E_r/1$, а именно: приведена диаграмма переходов в системе и получена формула для распределения числа этапов.

В третьей главе приведена блок-схема алгоритма программы метода этапов для анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания, и подробно описан каждый из блоков алгоритма.

В четвертой главе представлено описание и применение разработанной программы, предназначенной для анализа некспоненциальных систем массового обслуживания методом этапов.

1 Основное содержание работы

Введение содержит общую характеристику работы.

В первой главе представлен обзор основных понятий теории массового обслуживания, а именно: введены основные параметры и характеристики систем массового обслуживания, описаны случайные последовательности требований, а также рассмотрены следующие распределения случайных величин:

1. Экспоненциальное распределение. Непрерывная случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если функция распределения имеет вид

$$F(t) = P\{\xi < t\} = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Соответствующая функция плотности распределения

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины равны

$$E\xi = \frac{1}{\lambda};\ var\xi = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Экспоненциальное распределение имеет свойство отсутствия памяти, которое ставит его на одно из центральных мест в теории массового обслуживания.

2. Распределение Эрланга. Непрерывная случайная величина ξ имеет распределение Эрланга порядка k с параметром $\lambda > 0$, если ее функция распределения имеет вид

$$E_k(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, t \geq 0.$$

Функция плотности распределения величины ξ имеет вид

$$f(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

(при k = 1 получим плотность экспоненциального распределения).

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ равны

$$E\xi = \frac{k}{\lambda};\ var\xi = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Вторая глава посвящена описанию метода этапов и системе массового обслуживания типа $M/E_r/1$. В первом разделе описаны уравнения равновесия. В основе метода составления уравнений равновесия лежит равенство интенсивностей потока переходов в некоторое состояние и потока переходов из этого состояния и применение принципа сохранения потока к каждому состоянию системы. Во втором разделе главы введены основания метода этапов, который позволяет перейти к описанию системы массового обслуживания типа $M/E_r/1$.

Рассматривается состояние системы, когда в ней находится k требований, причем обслуживаемое требование находится на i-м этапе обслуживания, то число этапов, через которые предстоит пройти всем требованиям в системе,

$$j = (k-1)r + (r-i+1) = rk - i + 1.$$

Обозначим

$$P_j = P\{j \text{ этапов в системе}\}.$$

Связь между числом требований в системе и числом этапов позволяет записать

$$p_k = \sum_{j=(k-1)r+1}^{kr} P_j, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Полагая

$$P_j = 0, \qquad j < 0, \tag{1}$$

запишем систему уравнений равновесия системы обслуживания в стационарном состоянии

$$\lambda P_0 = r\mu P_1; \tag{2}$$

$$(\lambda + r\mu)P_j = \lambda P_{j-r} + r\mu P_{j+1}, \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Для решения этой системы уравнений используем производящую функцию

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j.$$

Умножим j-е уравнение (3) на z^j и просуммируем по всем возможным j. Получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda + r\mu) P_j z^j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_{j-r} z^j = \sum_{j=1}^{\infty} r\mu P_{j+1} z^j.$$

Перепишем это равенство в виде

$$(\lambda + r\mu)\left[\sum_{j=0}^{\infty} P_j z^j - P_0\right] = \lambda z^r \sum_{j=1}^{\infty} P_{j-r} z^{j-r} + \frac{r\mu}{z} \sum_{j=1}^{\infty} P_{j+1} z^{j+1}.$$

Выделяя $P(z)$, находим

$$(\lambda + r\mu)[P(z) - P_0] = \lambda z^r P(z) + \frac{r\mu}{z}[P(z) - P_0 - P_1 z].$$

Воспользуемся равенством (2) для дальнейшего упрощения:

$$P(z) = \frac{r\mu P_0[1 - (1/z)]}{\lambda + r\mu - \lambda z^r - (r\mu/z)},$$

и окончательно получим

$$P(z) = \frac{r\mu P_0[1 - z]}{r\mu - \lambda z^{r+1} - (\lambda + r\mu) z}. \tag{4}$$

Константу P_0 можно вычислить, учитывая, что $P(1) = 1$, и используя правило Лопиталя; таким образом,

$$P(1) = 1 = \frac{r\mu P_0}{r\mu - \lambda r},$$

что дает (учитывая, что $p_0 = P_0$)

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

В рассматриваемой системе интенсивность поступления требований равна λ, а математическое ожидание длительности обслуживания фиксировано и равно $1/\mu$ независимо от r. Следовательно, коэффициент использования системы

$$\psi = \lambda\bar{v} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Подставляя это выражение в (4), находим

$$P(z) = \frac{r\mu(1-\psi)(1-z)}{r\mu + \lambda z^{r+1} - (\lambda + r\mu)z}. \tag{5}$$

Чтобы получить распределение числа этапов в системе, требуется обратить эту функцию.

Для случая $r = 1$ имеем

$$P(z) = \frac{\mu(1-\psi)(1-z)}{\mu + \lambda z^2 - (\lambda+\mu)z} = \frac{(1-\psi)(1-z)}{1 + \psi z^2 - (1+\psi)z}.$$

По таблице производящих функций определим, что

$$P_k = (1-\psi)\psi^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

При произвольном r стандартный метод обращения преобразования (5) состоит в разложении этой дробно-рациональной функции на простые дроби и обращении каждой из этих дробей.

В третьей главе дано подробное описание алгоритма анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания методом этапов. Данный алгоритм имеет блочную структуру и состоит из 4 последовательно выполняемых блоков.

- Ввод данных:

  λ — интенсивность входящего потока требований;

  μ — интенсивность обслуживания требований.

- Проверка условия существования стационарного режима:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

- Вычисление стационарных характеристик системы по следующим формулам:

Математическое ожидание (м. о.) числа требований в системе:

$$\bar{n} = \sum_{k=0}^{V} np_k \tag{6}$$

М. о. длительности пребывания требований в системе:

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{\lambda}, \tag{7}$$

М. о. длительности обслуживания требований на приборе:

$$\bar{v} = \frac{1}{\mu}, \tag{8}$$

М. о. длительности пребывания требований в очереди:

$$\bar{w} = \bar{u} - \bar{v}, \tag{9}$$

М. о. числа требований в очереди:

$$\bar{b} = \lambda \bar{w}. \tag{10}$$

— Вывод результатов.

Четвертая глава посвящена разработанной программе, реализующей алгоритм метода этапов, которая предназначена для вычисления стационарных характеристик системы массового обслуживания типа $M/E_r/1$. Дано описание идентификаторов, входных данных, исходного кода. Проведено несколько экспериментов, а именно:

Эксперимент 1.

Пусть:

λ = 1.1 — интенсивность входящего потока требований,

$\mu \in$ [1.3 – 2.5] — интенсивность обслуживания требований,

r = 2 — число этапов,

где значение μ будет варьироваться в диапазоне от 1.3 до 2.5 с шагом 0.2.

В этом эксперименте исследуем характеристики системы в режиме средней нагрузки.

Используя алгоритм анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания, получим результаты, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Стационарные характеристики некэспоненциальной системы массового обслуживания

λ	μ	ψ	$\bar{n}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$	$\bar{b}$
1.1	2.5	0.44	0.617	0.561	0.37	0.191	0.21
1.1	2.3	0.478	0.699	0.635	0.4	0.235	0.258
1.1	2.1	0.524	0.807	0.734	0.435	0.299	0.329
1.1	1.9	0.579	0.956	0.869	0.476	0.393	0.432
1.1	1.7	0.647	1.176	1.069	0.526	0.543	0.597
1.1	1.5	0.733	1.534	1.395	0.588	0.807	0.888
1.1	1.3	0.846	2.215	2.014	0.667	1.347	1.482

График зависимости м. о. числа требований в системе от интенсивности обслуживания представлен на рисунке 1.

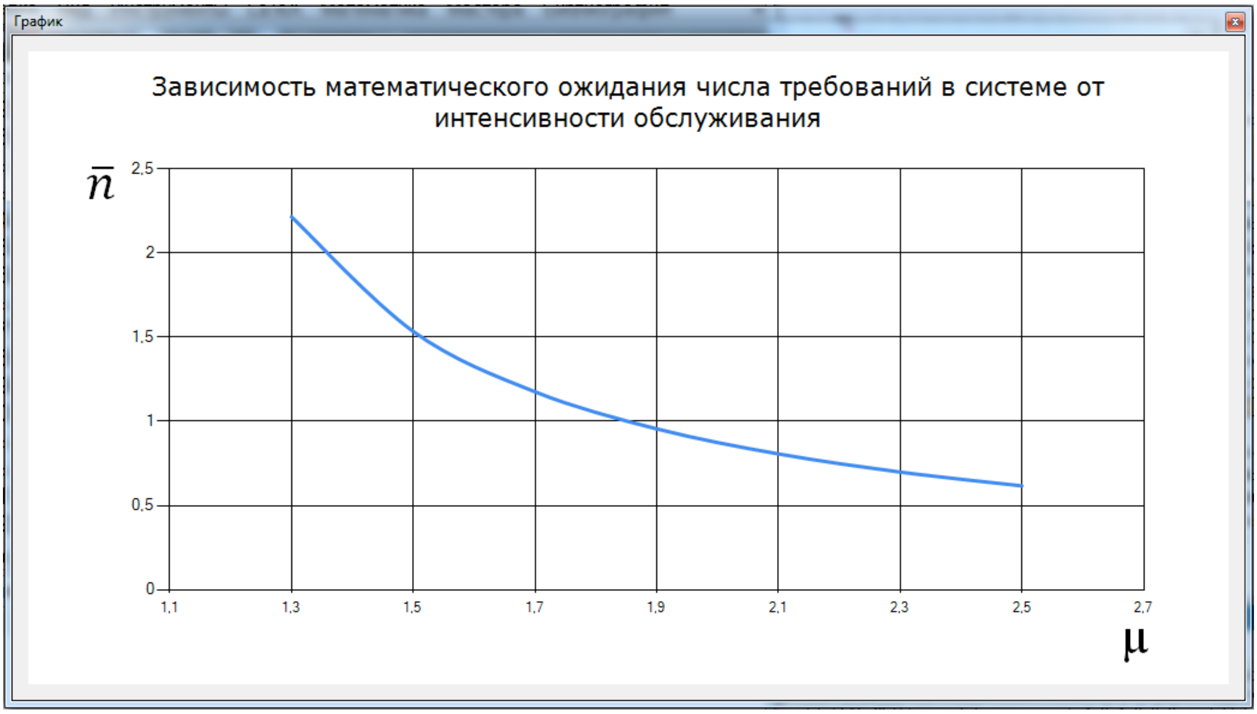

Рисунок 1 – Зависимость математического ожидания числа требований в системе от интенсивности обслуживания

График зависимости м. о. длительности пребывания требований в системе от интенсивности обслуживания представлен на рисунке 2.

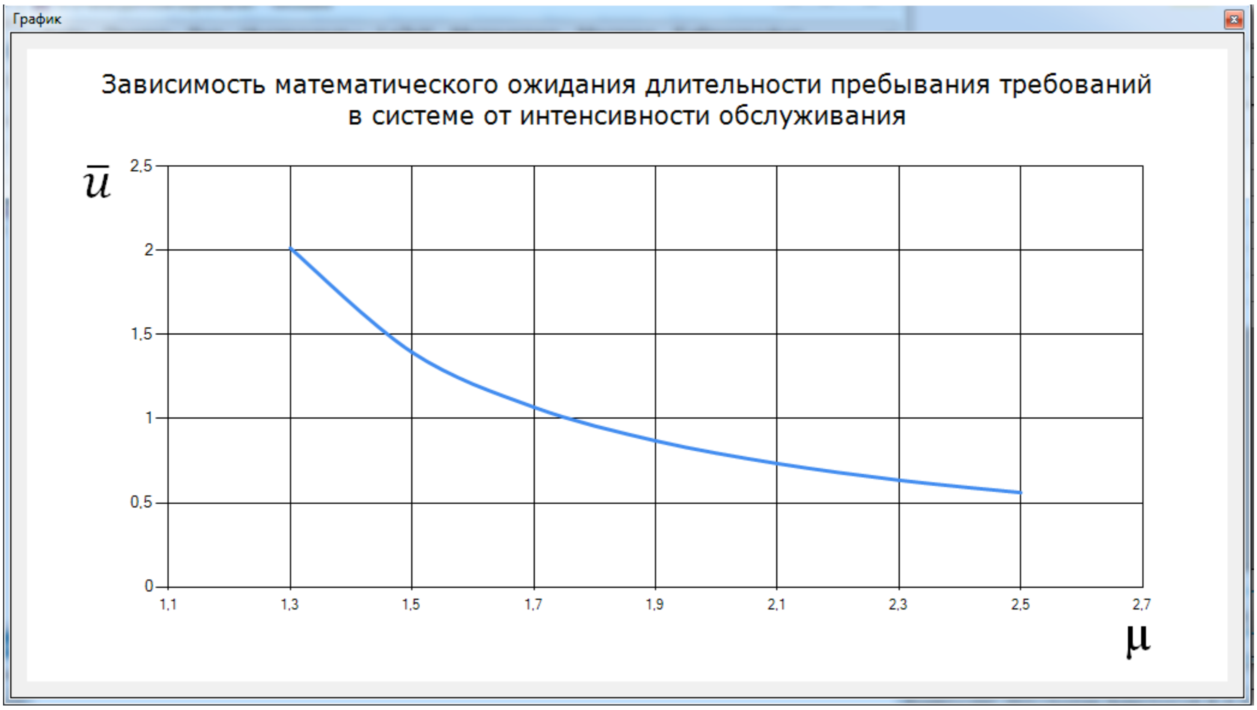

Рисунок 2 – Зависимость математического ожидания длительности пребывания требований в системе от интенсивности обслуживания

Эксперимент 2.

Пусть: $\lambda = 1.1$ — интенсивность входящего потока требований,

$\mu \in [2.5 - 6]$ — интенсивность обслуживания требований,

$r = 2$ — число этапов,

где значение μ будет варьироваться в диапазоне от 2.5 до 6 с шагом 0.5. В этом эксперименте исследуем характеристики системы в режиме слабой нагрузки.

Используя алгоритм анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания, получим результаты, приведенные в таблице 2

Таблица 2 – Стационарные характеристики некэспоненциальной системы массового обслуживания

λ	μ	ψ	$\bar{n}$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$	$\bar{b}$
1.1	6	0.183	0.195	0.177	0.154	0.023	0.025
1.1	5.5	0.2	0.214	0.195	0.167	0.028	0.031
1.1	5	0.22	0.238	0.216	0.182	0.034	0.037
1.1	4.5	0.244	0.267	0.243	0.2	0.043	0.047
1.1	4	0.275	0.304	0.276	0.222	0.054	0.059
1.1	3.5	0.314	0.353	0.321	0.25	0.071	0.078
1.1	3	0.366	0.422	0.384	0.286	0.098	0.108
1.1	2.5	0.44	0.526	0.478	0.333	0.145	0.16

График зависимости м. о. числа требований в системе от интенсивности обслуживания представлен на рисунке 3.

График зависимости м. о. длительности пребывания требований в системе от интенсивности обслуживания представлен на рисунке 4.

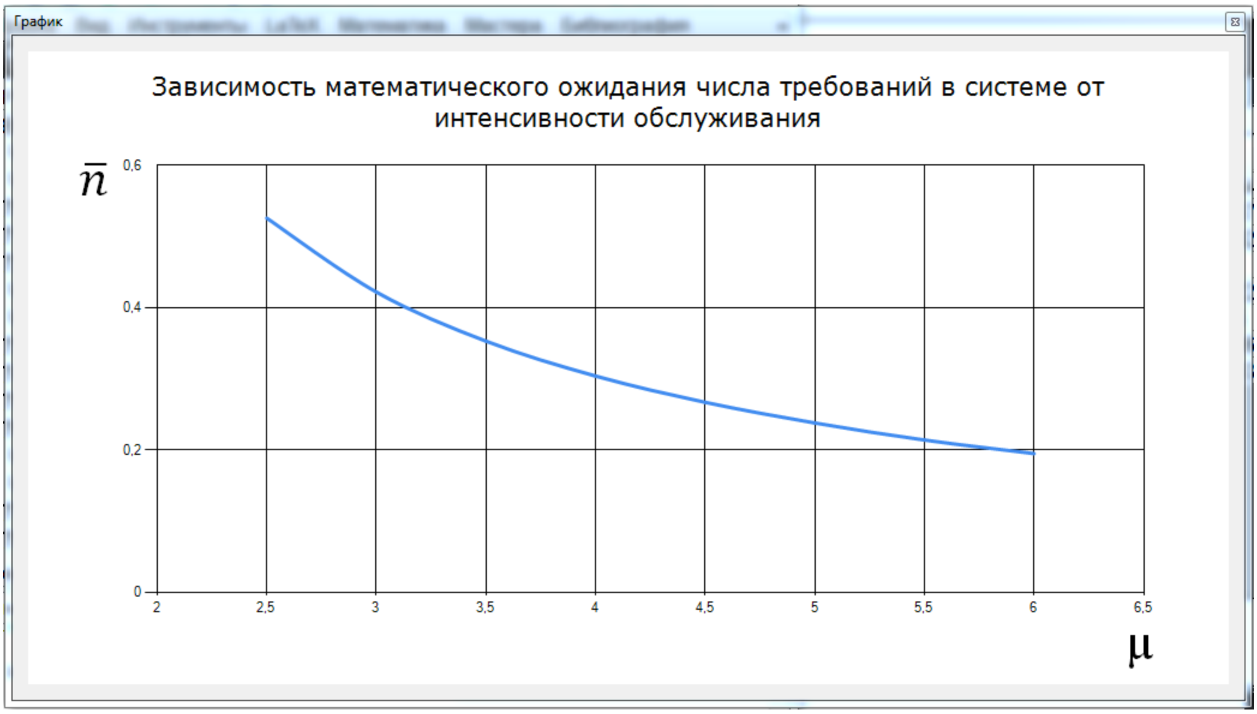

Рисунок 3 – Зависимость математического ожидания числа требований в системе от интенсивности обслуживания

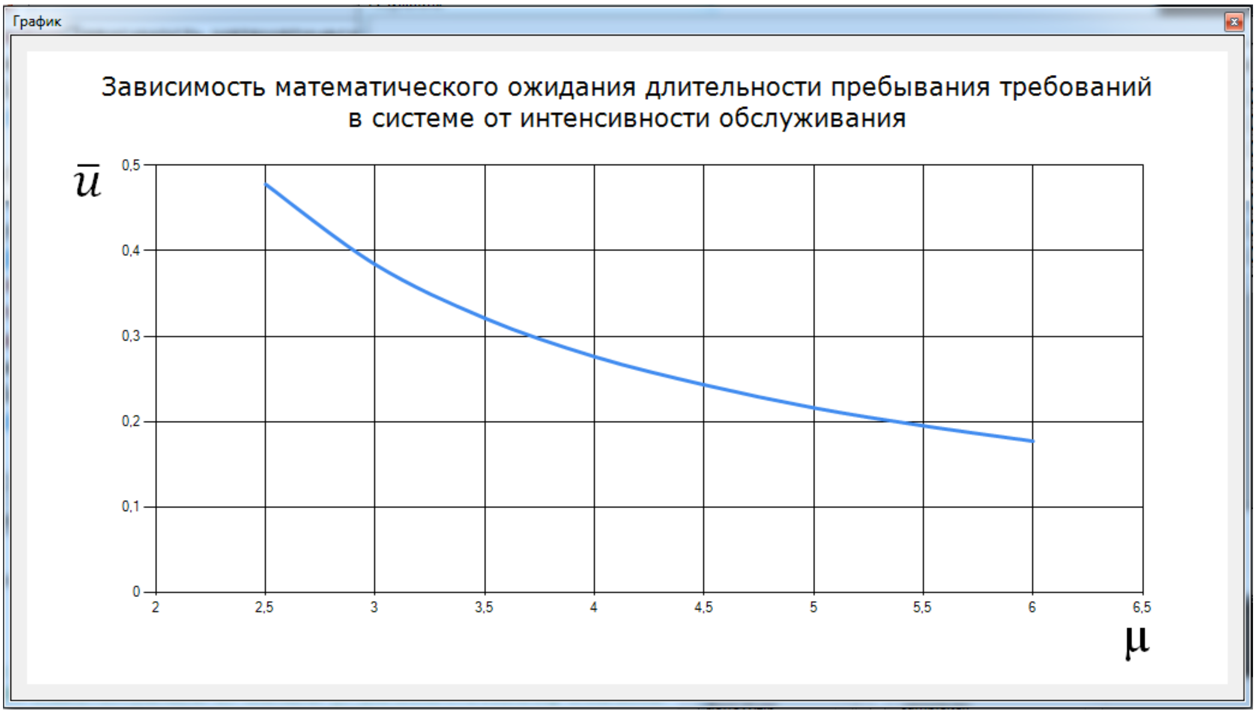

Рисунок 4 – Зависимость математического ожидания длительности пребывания требований в системе от интенсивности обслуживания

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе была рассмотрена система массового обслуживания $M/E_r/1$, в которой длительность обслуживания требований имеет распределение Эрланга порядка r, изучен метод этапов для анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания.

Представлен алгоритм программы, реализующей метод этапов для анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания этого типа. Приведена структурная схема алгоритма и подробно описан каждый из его блоков.

В процессе выполнения выпускной квалификационной работы была разработана программа для анализа неэкспоненциальных систем массового обслуживания методом этапов. Проведены численные эксперименты с помощью разработанной программы и приведены результаты в виде графиков и таблиц.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 *Митрофанов, Ю. И.* Анализ сетей массового обслуживания: Учеб. пособие / Ю. И. Митрофанов. — Издательство «Научная книга», 2005.

2 *Гнеденко, Б. В.* Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — Издательство «Наука», 1966.

3 *Клейнрок, Л.* Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — Издательство «Машиностроение», 1979.

4 *Кениг, Д.* Методы теории массового обслуживания / Д. Кениг, Д. Штойян. — Издательство «Радио и связь», 1981.

5 *Кофман, А.* Массовое обслуживание. Теория и приложения / А. Кофман, Р. Крюон. — Издательство «Мир», 1965.

6 *Башарин, Г. П.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета / Г. П. Башарин, П. П. Бочаров, Я. А. Коган. — Издательство «Наука, ГРФМЛ», 1989.

7 *Клейнрок, Л.* Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. — Издательство «Мир», 1979.

8 *Adan, I.* Queueing Systems / I. Adan, J. Resing. — Department of Mathematics and Computing Science Eindhoven University of Technology, 2015.

9 *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — Издательство «Наука», 1964.

10 *Боровков, А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков. — Издательство «Наука», 1972.