

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и  
автоматического управления

**АНАЛИЗ ЗАМКНУТЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ  
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ РЕКУРСИВНЫМ МЕТОДОМ**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 411 группы  
направления 02.03.02 — Фундаментальная информатика и информационные  
технологии  
факультета КНиИТ  
Коломиец Виктории Вячеславовны

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

В. И. Долгов

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

Ю. И. Митрофанов

Саратов 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Теория сетей массового обслуживания, как раздел теории вероятностей является эффективным инструментом для анализа и оптимизация различного рода сетей: информационно-вычислительных, коммуникационных, производственных, транспортных и других. Основными объектами изучения данного раздела теории вероятностей являются сети массового обслуживания — математические модели дискретных систем.

Применение методов теории сетей массового обслуживания позволяет вычислять различные характеристики, интересующие как инженеров-проектировщиков, так и пользователей сетей, например: временные характеристики сетей и входящих в их состав систем, коэффициенты использования устройств, производительности, интенсивности потоков требований и другие. Представленные в теории сетей массового обслуживания модели и методы достаточно просто и наглядно демонстрируют поведение реальных объектов, что позволяет экономить ресурсы при проектировании и разработке реальных объектов, избегать большинства ошибок проектирования сетей, а также позволяет оптимизировать уже спроектированные и функционирующие сети.

Целью настоящей работы является разработка программы для анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания рекурсивным методом, что включает в себя следующие задачи:

- рассмотрение рекурсивного метода анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания;
- разработка алгоритма анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания рекурсивным методом в общем случае;
- разработка программы, реализующей данный алгоритм;
- проведение серии экспериментов, демонстрирующих функционирование программы, с целью улучшения стационарных характеристик гипотетической замкнутой экспоненциальной сети посредством разработанной программы.

В качестве материалов исследования были использованы результаты теории вероятностей, теории марковских процессов, теории массового обслуживания, теории сетей массового обслуживания.

Настоящая работа представлена введением, пятью разделами, заключением, списком использованных источников и приложением (листингом про-

граммы).

Раздел 1. В данном разделе представлено описание однородных замкнутых сетей массового обслуживания, а также системы уравнений нормировки.

Раздел 2. В данном разделе представлено рассмотрение рекурсивного метода анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания, а также рассмотрение и доказательство теорем, необходимых для получения стационарных характеристик сети.

Раздел 3. В данном разделе представлено описание алгоритма, построенного на основе вышеупомянутого метода.

Раздел 4. В данном разделе представлено описание программы, реализующей алгоритм анализа замкнутых экспоненциальных сетей посредством рекурсивного метода.

Раздел 5. В данном разделе представлены результаты серии экспериментов анализа замкнутой экспоненциальной сети с различными векторами интенсивностей обслуживания.

## 1 Основное содержание работы

Введение работы содержит в себе общие положения работы.

Глава 1 «Однородные замкнутые сети массового обслуживания» содержит подробное описание сетей массового обслуживания, заданных набором

$$\Gamma = \langle L, 1, N, M, \Theta, \kappa, \mu, FCF S, 1, \pi \rangle \quad (1)$$

с постоянными интенсивностями обслуживания в системах  $C_i, i = 1, \dots, L$ .

Рассматриваются основные формулы, определяющие вероятность пребывания сети в состоянии  $n = (n_i)$

$$P(n) = \frac{1}{G(N, L)} \prod_{m=1}^{n_i} f_i(n_i), \quad (2)$$

где  $f_i(n_i)$  — величина, пропорциональная вероятности того, что система  $C_i$  находится в состоянии  $n_i$  (в  $C_i$  пребывает  $n_i$  требований),

$$f_i(n_i) = x_i^{n_i} / \prod_{m=1}^{n_i} \alpha_i(m), \quad (3)$$

$$x_i = \omega_i / \mu_i; \quad (4)$$

$\omega_i = (\omega_1, \dots, \omega_L)$  — решение системы уравнений  $\omega\theta = \omega$  (может быть описана как)

$$\omega_j = \sum_{i=1}^L \omega_i \theta_{ij} \quad j = 1, \dots, L \quad (5)$$

с условием нормировки;

$$\sum_{i=1}^L \omega_i = 1; \quad (6)$$

$$\alpha_i(m) = \min(m, k_i), \quad i \leq m \leq N; \quad (7)$$

$G(N, L)$  — нормирующая константа, определяемая, как

$$G(N, L) = \sum_{n \in S(N, L)} \prod_{i=1}^L f_i(n_i). \quad (8)$$

где  $S(N, L)$  — множество состояний сети

$$S(N, L) = \{n = (n_1, \dots, n_L) | n_i \geq 0, i = 1, \dots, L, \sum_{i=1}^L n_i = N\}, \quad (9)$$

где  $n_i$  — число требований, пребывающих в системе  $C_i$ . Мощность  $S(N, L)$  равна

$$\binom{N + L - 1}{L - 1}. \quad (10)$$

Глава 2 «Рекурсивный метод анализа сетей» содержит в себе подробное описание рекурсивного метода анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания. Подробный вывод основного рекуррентного соотношения

$$P\{n_i = l | Y\} = \frac{x_i G(Y - 1, L)}{\alpha_i(l) G(Y, L)} P\{n_i = l - 1 | Y - 1\}, \quad (11)$$

$$P\{n_i = 0 | Y - 1\} = \frac{1}{G(Y - 1, L)} \sum_{n \in S(Y-1, L) \& n_i=0} \prod_{j=1}^L f_j(n_j), \quad (12)$$

доказательства теорем, для поиска стационарных характеристик сетей и получение следующих соотношений:

$$\bar{u}_{i|N} = \frac{1}{\mu_i} \left( \frac{1}{k_i} z_{i|N-1} + 1 \right), i \in \mathcal{L}, \quad (13)$$

где

$$z_{i|N} = \sum_{l=k_i}^{N-1} (l + 1 - k_i) P\{n_i = l | N - 1\}, \quad (14)$$

$$\bar{n}_{i|N} = \omega_i \bar{u}_{i|N} N \left/ \sum_{j=1}^L \omega_j \bar{u}_{j|N} \right., \quad (15)$$

$$\bar{b}_{i|N} = \bar{n}_{i|N} \bar{w}_{i|N} / \bar{u}_{j|N}, \quad (16)$$

$$\lambda_{i|N} = \bar{h}_{i|N} \mu_i, \quad (17)$$

$$\bar{w}_{i|N} = \bar{n}_{i|N} - 1 / \mu_i, \quad (18)$$

$$\bar{h}_{i|N} = \bar{n}_{i|N} - \bar{b}_{j|N}, \quad (19)$$

$$\psi_{i|N} = \bar{h}_{i|N}/k_i, \quad (20)$$

$$\bar{\tau}_{i|N} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^L \omega_j \bar{u}_{j|N}, \quad (21)$$

далее применяемых для разработки алгоритма и программы.

Глава 3 «Алгоритм анализа замкнутых экспоненциальных сетей обслуживания в общем случае» содержит в себе подробное описание алгоритма анализа замкнутых экспоненциальных сетей обслуживания в общем случае. Данный алгоритм имеет блочную структуру и состоит из 10 последовательно выполняемых блоков.

— Ввод данных:

- $N$  — числа требований, пребывающих в сети,
- $L$  — числа систем в сети,
- $\Theta$  — маршрутной матрицы переходов,
- $\kappa$  — вектора числа обрабатывающих приборов в системах сети,
- $\mu$  — вектора интенсивностей обслуживания систем сети.
- Вычисление вектора  $\omega = (\omega_i), i = 1, \dots, L$  по формуле (5).
- Вычисление вектора  $x = (x_i), i = 1, \dots, L$  по формуле (4).
- Определение матрицы  $\alpha = (\alpha_{ij}) = (\alpha_j(i)), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, L$  по формуле (7).
- Определение матрицы  $f = (f_{ij}) = (f_j(i)), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, L$  по формуле (3).
- Вычисление вектора  $G = (G_{i|N}), i = 1, \dots, L$  по формуле (8).
- Вычисление вектора  $z = (z_{i|N-1}), i = 1, \dots, L$  по формуле (14).
- Вычисление вектора  $u = (\bar{u}_{i|N}), i = 1, \dots, L$  по формуле (13).
- Вычисление стационарных характеристик сети по формулам (15 – 21);
- Вывод данных.

Глава 4 «Описание и назначение программы» содержит в себе подробное описание разработанной программы: описание идентификаторов, описание входных данных, описание исходного кода, описание функций. Программа предназначена для вычисления стационарных характеристик замкнутой экспоненциальной сети посредством рекурсивного метода в общем случае. Программа реализована на языке C# в среде разработки Microsoft Visual Studio Community 2013 на основе .NET Framework 4 Client Profile. Программа позво-

ляет вычислять следующие стационарные характеристики:

- м. о. длительности пребывания требования в каждой системе сети;
- м. о. числа требований в каждой системе сети;
- м. о. числа требований, ожидающих обслуживания в очереди каждой системы сети;
- интенсивность потока требований в каждой системе сети;
- м. о. длительности ожидания в очереди каждой системы сети;
- м. о. числа занятых приборов каждой системы сети;
- коэффициент использования обслуживающих приборов каждой системы сети;
- м. о. длительности реакции для в каждой системы сети;

Структура программы представлена двумя классами: основным — Programm и вспомогательным — FunCont.

Глава 5 «Практическое применение программы» содержит в себе результаты экспериментов, проведённых посредством разработанной программы. Приведён пример анализа и дальнейшей оптимизации произвольной замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были выполнены следующие задачи:

- рассмотрен рекурсивный метод анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания;
- на основе рассмотренного метода разработан алгоритм анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания;
- разработана программа, реализующая приведённый выше алгоритм;
- проведена серия экспериментов с целью улучшения стационарных характеристик гипотетической замкнутой экспоненциальной сети посредством разработанной программы.

Разработанная в работе программа может быть применена для анализа замкнутых экспоненциальных сетей массового обслуживания рекурсивным методом. Также программа позволяет максимально точно оценивать поведение рассматриваемой сети с целью её дальнейшей оптимизации.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Абышкин В. А., Самуйлов К. К. Метод расчета характеристик сетей массового обслуживания с матрицей переходных вероятностей, зависящей от состояния сети // XII Всесоюзный семинар по вычислительным сетям. Тезисы докладов. М.: ВИНТИ, 1987, часть 2, стр. 227-231
- 2 Венцель Е. С., Теория вероятностей.: М. Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973.
- 3 Кофман А. Массовое обслуживание. Теория и приложения / Пер. с фран. — М.: Мир, 1965. — 303 с.
- 4 Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / Пер. с англ. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. — 512 с.
- 5 Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, ГРФМЛ, 1966. — 432 с.
- 6 Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. Теория массового обслуживания. — М.: Высш. школа, 1982. — 256 с.
- 7 Чжун Кай-Лай. Однородные цепи Маркова / Пер. с англ. — М.: Мир, 1964. — 428 с.
- 8 Митрофанов Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания: Учеб.пособие. — Саратов; Изд-во «Научная книга», 2005. — 175 с
- 9 Гурьянов А. В., Митрофанов Ю. И. Определение параметров замкнутых линейных сетей систем массового обслуживания // Системное моделирование. — Новосибирск: Вычислительный центр СО АН СССР, 1970. — Вып.1. — С. 39-49
- 10 Gordon W. J., Newell G. F. Closed queuing systems with exponential servers // Oper. Res. 1967. — Vol. 15, No. 2. — P. 254–256.