

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра информатики и программирования

**МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТИПА «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 441 группы  
направления 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование  
информационных систем  
факультета компьютерных наук и информационных технологий  
Савина Артема Дмитриевича

Научный руководитель:

доцент, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

К. П. Вахлаева

подпись, дата

Зав. кафедрой:

доцент, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

А. Г. Федорова

подпись, дата

Саратов 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы обыкновенных дифференциальных уравнений широко используются при построении математических моделей различных процессов, зависящих от времени, таких как вычисление траектории движения планет и спутников Земли, прогнозирование погоды, расчет динамики биологических популяций [1]. Задача Коши – одна из основных задач теории дифференциальных уравнений, которая состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям [2].

Все методы решения дифференциальных уравнений подразделяются на аналитические, которые позволяют выразить решение через элементарные функции, и численные, в которых решение получается в виде таблицы приближенных значений искомой функции в некоторых точках рассматриваемой области значений аргумента, именуемых сеткой. Появление быстродействующих вычислительных машин сделало численные методы одним из основных способов решения широкого класса практических задач, математически представленных дифференциальными уравнениями [3, 4, 5].

Во многих важных приложениях таких как, моделирование кинетики химических реакций и биологических систем, расчете электронных схем возникает проблема численного решения задачи Коши для жестких систем [6].

С самого начала исследования жестких систем было замечено, что они лучше поддаются решению неявными методами, однако, в связи с быстрым ростом возможностей вычислительной техники, в настоящее время широко применяются и явные методы группы Рунге-Кутты [7].

**Целью** работы является анализ явных методов группы Рунге-Кутты решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на примере модели типа «хищник-жертва». Данная цель предполагает решение следующих **основных задач**:

1. изучить явные методы группы Рунге-Кутты различных порядков точности;

2. освоить разработку программ в среде графического программирования LabVIEW для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений;
3. оценить качество работы численных методов в зависимости от параметров системы на примере модели типа «хищник-жертва».

Работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и приложений. Первый раздел «Решение обыкновенных дифференциальных уравнений», второй раздел «Решение жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на примере модели типа «хищник-жертва» с помощью LabVIEW».

### Основное содержание работы

**Постановка задачи.** Дифференциальное уравнение вместе с начальным условием называется *начальной задачей* или *задачей Коши*:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Для численного решения дифференциальных уравнений непрерывное изменение аргумента  $t$  заменяется на дискретное. Таким образом, функция  $u(t)$  будет представлена не для всех  $t$ , а для некоторого дискретного конечного набора значений  $t_i$ , которые обычно называют *узлами сетки*,  $i = 0, \dots, n$ . При этом узлы сетки могут быть либо заданы заранее, либо они должны определяться в зависимости от требуемой точности. Обозначим  $h = t_{i+1} - t_i$  – *шаг сетки*,  $i = 0, \dots, n - 1$ . Число узлов сетки  $n + 1$ , длина шага  $h$  и отрезок времени  $[t_0, t_n]$  связаны соотношением:

$$n = \frac{t_n - t_0}{h} + 1.$$

Сетка, как правило, выбирается *равномерная*, в этом случае узлами сетки служат точки  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0, \dots, n - 1$ .

Используя значения функции  $u(t)$  в узлах сетки, переходят от производной к ее представлению в виде сеточной функции:

$$\frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{h}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение заменяется разностным и решение разностного уравнения представляет собой численное (приближенное) решение дифференциального уравнения. Наряду с уравнениями для одной неизвестной функции в теории дифференциальных уравнений рассматриваются также и системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{U}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}), \\ \mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}^0. \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T, \mathbf{U}' = [u'_1, u'_2, \dots, u'_n]^T,$$

$$\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T, f_j = f_j(t, \mathbf{U}), j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mathbf{U}^0 = [u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0]^T.$$

**Методы Рунге-Кутты решения задачи Коши.** Для эффективного и качественно правильного решения задачи Коши необходимо выявить характер задачи и выбрать наиболее подходящий метод. В работе рассматривается возможность применения явных методов группы Рунге-Кутты для численного решения жестких задач [7, 8]. Методы Рунге-Кутты обладают следующими отличительными свойствами:

- эти методы являются одношаговыми;
- они согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка  $h^k$ , где степень  $k$  определяет порядок метода;
- при вычислениях не используются производные от  $f(t, u)$ , а требуются вычисления самой функции.

**Автономная система. Метод фазовой плоскости.** Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *автономной*, если  $\mathbf{F}$  не зависит от времени [9]:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{F}(\mathbf{U}).$$

Системы двух автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

с заданными начальными условиями  $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$  допускают качественное исследование с помощью метода *фазовой плоскости*. Проекция интегральной кривой на фазовую плоскость называется *фазовой траекторией*. На фазовой траектории выбирается направление движения в сторону возрастания параметра времени  $t$ .

*Теорема.* Всякая фазовая траектория автономной системы принадлежит к одному из трех типов:

1. положение равновесия;
2. замкнутая гладкая кривая – периодическое решение с наименьшим периодом;
3. гладкая кривая без самопересечений.

Множество фазовых траекторий, отвечающих различным начальным условиям, называется *фазовым портретом* системы. Во многих случаях фазовый портрет позволяет получить достаточно наглядное представление о динамике системы. Используя фазовый портрет можно исследовать закономерности изменения состояния системы, полученные в результате решения системы дифференциальных уравнений для разных значений параметров и начальных данных.

**Жесткие системы.** Исторически интерес к жестким системам возник в середине XX века при изучении уравнений химической кинетики с одновременным присутствием очень медленно и очень быстро протекающих химических реакций. В характере решений жесткой системы выделяются участки с существенно различным поведением. Одни участки с быстрым изменением искомой функции, и другие, на которых значения производных функции существенно меньше, поэтому для получения правильного решения жестких систем бывает необходимо выбирать очень малый шаг интегрирования [10-13]. Основным недостатком жесткой системы является отсутствие у нее свойства *структурной устойчивости*, то есть малое изменение правых частей в ней может приводить к качественному изменению поведения решения.

Математическая модель Лотки-Вольтерры – пример жесткой системы, являющейся структурно неустойчивой [10].

**Математическая модель Лотки-Вольтерры.** Модель Лотки-Вольтерры представляет собой математическое описание дарвинского принципа борьбы за существование. В первой половине XX века вышли основополагающие работы Альфреда Лотки и Вито Вольтерры [14], в которых авторы независимо друг от друга сформулировали математическую модель, описывающую динамику взаимоотношений «хищник-жертва», точнее – динамику численности популяции хищника и динамику численности популяции жертвы.

*Модель Лотки-Вольтерры* представляется задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - cy)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-b + dx)y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

где  $a, b, c, d$  – положительные постоянные, являющиеся *параметрами модели*.

На рисунке 1 изображен фазовый портрет системы «хищник-жертва» на фазовой плоскости  $(x, y)$ , состоящий из нескольких фазовых траекторий. В зависимости от начальных условий фазовые траектории будут различаться, а положение равновесия сохраняется.

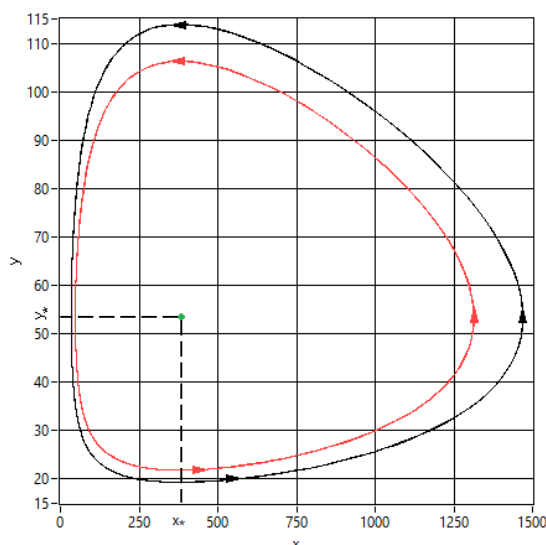


Рисунок 1 – Фазовый портрет системы «хищник-жертва».

Неэллиптичность формы фазовой траектории отражает негармонический характер колебаний. Синусоидальное решение возможно лишь при малых отклонениях  $x$  и  $y$  относительно положения равновесия  $(x_*, y_*)$  (см. Рисунок 1). При больших отклонениях закон не будет гармоническим, тем не менее, колебания численностей хищников и жертв происходят с одинаковой частотой, и наблюдается смещение колебаний по фазе [15-18].

При анализе динамики численности двух конкурирующих видов и генетического состава популяций возникают релаксационные колебания, описываемые следующими уравнениями [19]:

*Две популяции – один признак:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(1 - 0.5x - \frac{2}{7\alpha^2}\right)x, \\ \frac{dy}{dt} = (2\alpha - 3.5\alpha^2x - 0.5y)y, \\ \frac{d\alpha}{dt} = (2 - 7\alpha x)\varepsilon, \end{cases}$$

где  $0 < \varepsilon \leq 0.01$ ,  $0 < x_0 \leq 3$ ,  $0 < y_0 \leq 15$ ,  $0 < \alpha_0 \leq 4$ ,  $t \in [0, 1500]$ .

Наличие малого параметра  $\varepsilon$  в третьем уравнении системы показывает, что генетический признак меняется медленнее, чем численность популяций. Наряду с данной задачей в [19] описана более интересная, когда численность двух популяций зависит от их взаимодействия и двух медленно меняющихся генетических признаков.

*Две популяции – два признака:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2\alpha_1 - 0.5x - 3.5\alpha_1^3y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (2\alpha_2 - 3.5\alpha_2^3x - 0.5y)y, \\ \frac{d\alpha_1}{dt} = (2 - 10.5\alpha_1^2y)\varepsilon, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = (2 - 10.5\alpha_2^2x)\varepsilon, \end{cases}$$

где  $0 < \varepsilon \leq 0.01$ ,  $0 < x_0, y_0 \leq 40$ ,  $0 < \alpha_1^0, \alpha_2^0 \leq 10$ ,  $t \in [0, 2000]$ .

**Реализация численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений в LabVIEW.** В работе применяются блочные модели, предоставляемые модулем Simulation системы графического программирования LabVIEW (Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench) и предназначенному для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [20, 21]. Программа, написанная в среде LabVIEW, называется виртуальным прибором VI (Virtual Instrument). Основные части виртуального прибора включают в себя лицевую панель с элементами управления и панель блок-схемы с функциональными элементами. В среде графического программирования LabVIEW было реализовано два примера жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся конкурентными моделями для двух популяций, характеризующихся одним или двумя генетическими признаками, и соответствующим системам уравнений, приведенным выше. В качестве решения были получены графики изменения количества популяций во времени различными численными методами.

На рисунке 2 изображена динамика двух видов, один из которых характеризуется изменяемым генетическим признаком. Расчет проведен при следующих значениях параметров и начальных данных:  $\varepsilon = 0.01$ ,  $x_0 = 3$ ,  $y_0 = 7.5$ ,  $\alpha_0 = 3.4$ ,  $t = 1500$ . На графиках видно, что колебания носят релаксационный характер, виды попеременно и почти полностью вытесняют друг друга, и этот процесс повторяется периодически. Данный режим устанавливается в определенном диапазоне изменения генетического признака  $\alpha$ . В результате проведенных с помощью разработанной программы исследований получено, что для начального значения признака  $\alpha_0$  границы диапазона, при которых система приходит в режим релаксационных колебаний, попадают в интервал  $[0.15, 3.65]$ . Аналогичным образом релаксационные колебания возникают в системе, где каждый из конкурирующих видов обладает генетическим признаком. В результате проведенных исследований с помощью разработанной программы были получены начальные значения генетических признаков  $\alpha_1^0 = 4.05$ ,  $\alpha_2^0 = 1.0$  для возникновения колебаний.



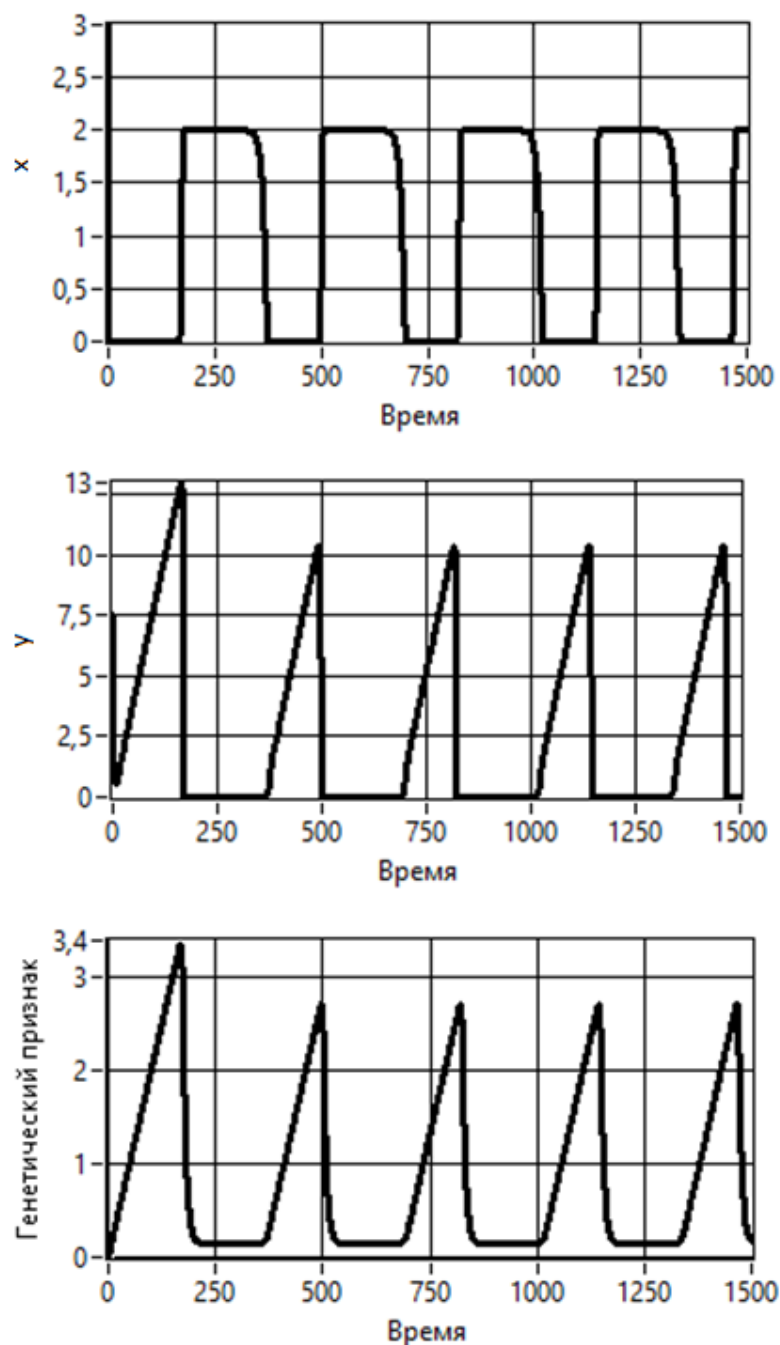


Рисунок 2 - Динамика двух конкурирующих видов, один из которых обладает изменяемым генетическим признаком.

Численное решение проводилось методом Адамса-Мултона, приведенного в качестве образца неявного метода, и явными методами Рунге-Кутты 4-5-ого и Рунге-Кутты 2-3-его порядков точности с начальным значением шага  $h = 10^{-5}$ . Метод Рунге-Кутты 4-5 показал для системы с двумя признаками более регулярный и правильный характер колебаний по сравнению с системой с одним признаком. Метод Рунге-Кутты 2-3 показал неустойчивость

численности популяций, поскольку конкурирующие виды достигли экспоненциально малых и больших значений соответственно.

Все вычисления проводились на компьютере Dell Inspiron 5720, процессор: Intel(R) Core(TM) i3-2370M с тактовой частотой 2.40GHz. В таблице 1 представлено время выполнения программ в зависимости от выбранного численного метода.

Таблица 1 – Время расчета динамики популяций

Метод/Время (сек)	Две популяции – один признак	Две популяции – два признака
Рунге-Кутты 2-3	9.92083	—
Рунге-Кутты 4-5	7.69534	17.6862
Адамса-Мултона	12.7866	79.7846

Таким образом, можно сделать вывод о возможности эффективного решения жестких систем типа «хищник-жертва» явным методом Рунге-Кутты 4-5-ого порядка точности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается численное решение задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В среде графического программирования LabVIEW выполнена программная реализация решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, являющихся модификациями системы уравнений Лотки-Вольтерры. Проведен численный эксперимент по оценке эффективности различных методов решения жестких задач на примере взаимодействия типа «хищник-жертва». Показана возможность решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений специализированными явными методами, а именно методами Рунге-Кутты 2-3-его и 4-5-ого порядков точности с переменным шагом.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 400 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М. : Наука, 1987. – 630 с.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М. : Высшая школа, 2002. – 848 с.
4. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
6. Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г. Численные методы решения жестких систем. – М. : Наука, 1979. – 208 с.
7. Новиков Е. А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. – 195 с.
8. Скворцов Л. М. Точность методов Рунге-Кутты при решении жестких задач // Вычислительная математика и математическая физика, 2003. Т. 43. № 9. С. 1374-1384.
9. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М. : Наука. – 1971. – 239 с.
10. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. – М. : МЦНМО, 2004. – 32 с.
11. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М. : Наука, 1975. – 248 с.
12. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно-возмущенных системах – М. : Наука. Физматлит, 1995. – 336 с.
13. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М. : Мир, 1999. – 685 с.
14. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / Пер. с французского под ред. Ю. М. Свирижева. – М. : Наука, 1976. – 288 с.
15. Трубецков Д. И. Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с

- ней // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2011. Т. 19. № 2. – С. 69-88.
16. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М. : Наука, 1985. – 182 с.
17. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. – 368 с.
18. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. – 184 с.
19. Кондрашов А. С., Хибник А. И. Экогенетические модели как быстро-медленные системы // Исследования по математической биологии. – Пущино, 1996. – С. 88-123.
20. Тревис Д. LabVIEW для всех. – М. : ПриборКомплект, 2004. – 537 с.
21. Жуков К. Г. Модельное проектирование встраиваемых систем в LabVIEW. – М. : ДМК Пресс, 2011. – 688 с.