Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Площади фигур гиперболической плоскости положительной кривизны

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки)___2__ курса __227_____группы
направления (специальности)

02.04.01 – Математика и компьютерные науки
код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Клычковой Виктории Александровны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, д.ф.-м.н., доцент ____________________ Л. Н. РОМАКИНА
должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ______________________ В. В. РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2016 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В модели Кэли-Клейна *гиперболическая плоскость* $\hat{H}$ *положительной кривизны*[1] расположена на внешней относительно *абсолютной* овальной линии γ области *расширенной гиперболической плоскости* H^2. Плоскость $\hat{H}$ как абсолютная входит в трехмерное пространство Минковского, а как собственная – в гиперболическое 3-пространство положительной кривизны, являющееся проективной моделью применяемого в космологии 3-пространства де Ситтера. В классическую схему Кэли-Клейна геометрия плоскости $\hat{H}$ не входит, но ее построение может быть проведено на проективной основе, поэтому продолжает реализацию «Эрлангенской программы» Ф. Клейна[2]. В связи с этим магистерская работа, посвященная развитию теории площадей плоскости $\hat{H}$, представляется актуальной.

Цели и задачи работы. Цель данной работы – познакомиться с теорией площадей плоскости $\hat{H}$ и вывести формулу площади трипрямоугольника данной плоскости. В рамках исследования трипрямоугольника решены следующие задачи: доказано существование трипрямоугольника и предложен алгоритм его построения; доказана теорема о свободном угле трипрямоугольника; выведена формула площади трипрямугольника.

Описание структуры работы. Магистерская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка использованных источников, содержащего 39 наименований, в том числе 1 ссылку на Интернет-ресурсы. Объем работы составляет 57 страниц. В работе представлены 10 иллюстраций.

---

[1] Розенфельд, Б. А. Неевклидовы пространства. М. : Наука, 1969. С. 210; Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.; Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 2 : Преобразования и простые разбиения. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 274 с.

[2] Klein, F. Vergleichende Betrachtungen uber neuere geometrische Vorschungen (Programm zum Eintritt in die philosophische Facultat und den Senat der Universitat zu Erlangen). Erlangen : A. Deichert, 1872.

Краткая характеристика материалов работы. Вводная часть работы, включающая в себя первые два раздела, имеет реферативный характер, самостоятельное исследование описано в разделе 3. В первом разделе введены основные понятия геометрии плоскости $\widehat{H}$, заложена теоретическая основа понятия площади фигуры и указаны особенности введения этого понятия на плоскости $\hat{H}$. Во втором разделе построены и описаны ортогональные системы координат, определенные циклами данной плоскости[3]. В третьем разделе представлены первые теоремы о площадях фигур, приведено доказательство основной теоремы о площади прямоугольного трехреберника.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы заключается в проверке и усвоении основных положений зарождающейся на современном этапе теории площадей плоскости $\hat{H}$, а также в дальнейшем развитии этой теории. Научная новизна работы заключается в доказательстве существования трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$ и выводе формулы его площади. К основным новым результатам работы относятся теорема о свободном внутреннем угле и теорема о площади трипрямоугольника.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие самостоятельно полученные результаты.

1. Доказательство существования и алгоритм построения трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$.

2. Теорема о свободном угле трипрямоугольника (теорема 8): *внутренний угол при свободной вершине трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$ является гиперболическим квазиуглом.*

3. Теорема о площади трипрямоугольника (теорема 9): *площадь S трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$, мера α свободного квазиугла которого равна $\alpha_0 + i\frac{\pi}{2}$, может быть вычислена по формуле $S = \rho^2\left(\alpha - i\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_0\,\rho^2$.*

---

[3] Ромакина, Л. Н. Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т.12, вып. 3. С. 37–44.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Плоскость $\hat{H}$ гомеоморфна листу Мебиуса без границ и имеет общую с плоскостью Лобачевского фундаментальную группу G, являющуюся группой проективных автоморфизмов линии γ. Первое систематическое построение геометрии плоскости $\hat{H}$ начато в работах Л. Н. Ромакиной, где, в частности, проведена классификация углов плоскости $\hat{H}$, показано, что все углы плоскости $\hat{H}$ относятся к пятнадцати типам, углы шести типов измеримы, углы трех типов имеют вещественные меры[4]; обоснована теория площадей данной плоскости и получены первые формулы площадей фигур[5].

---

[4] Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.; Ромакина, Л. Н. Аналоги формулы Лобачевского для угла параллельности на гиперболической плоскости положительной кривизны // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10. С. 393–407.

[5] Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, № 1. С. 127–147; Ромакина, Л. Н. К теории площадей гиперболической плоскости положительной кривизны // Publications de L'Instiiut Mathématique. Nouvelle série. 2016. Tome 99, № 113. P. 139–154. DOI: 10.2298/PIM1613139R.6; Ромакина, Л. Н. О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. тр. 2014. Т. 17, вып. 2. С. 184–206. In English: L. N. Romakina, On the area of a trihedral on a hyperbolic plane of positive curvature, Sib. Adv. Math. 2015. V. 25, iss. 2. P. 138–153. DOI: 10,3103 / S1055134415020042; Romakina, L. N. The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2016. V. 10, iss. 4. P. 293–310; Ромакина, Л. Н. О площади простого 4-контура гиперболической плоскости положительной кривизны // Сб. научн. статей междунар. конф. Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2014. С. 346–353; Ромакина, Л. Н. О площади эллиптического четырехугольника Саккери на гиперболической плоскости положительной кривизны // Математика. Механика: сб. научн. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2013. № 15. С. 65–69; Ромакина, Л. Н. Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны правильными орициклическими n-трапециями // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, № 3. С. 376-416.

Замкнутые без самопересечений линии плоскости $\hat{H}$ могут быть односторонними, не разбивающими $\hat{H}$ на части, и двусторонними, разбивающими $\hat{H}$ на две связные части. Пусть на плоскости $\hat{H}$ σ – замкнутая двусторонняя ломаная без самопересечений, состоящая из n звеньев. Одна из областей плоскости $\hat{H}$, ограниченных ломаной σ, гомеоморфна диску, обозначим ее β, а другая – листу Мёбиуса с дыркой. Объединение ломаной σ и области β назовем *n-реберником*[6] плоскости $\hat{H}$ с *границей* σ и *внутренностью* β. *Трипрямоугольником* плоскости $\hat{H}$ назовем 4-реберник, имеющий три прямых угла. Внутренний непрямой угол трипрямугольника назовем *свободным*.

Согласно определению n-реберник плоскости $\hat{H}$ – это аналог многоугольника евклидовой плоскости. Как известно, решение многоугольников евклидовой плоскости на современном этапе выделилось в самостоятельное направление геометрии[7], имеющее свои истоки в трудах древнегреческих ученых.

---

[6] Ромакина, Л. Н. О параболических многогранниках копсевдоевклидова пространства // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2013. Т. 1, № 23. С. 201–206.

[7] Сабитов, И. Х. Решение циклических многоугольников // Матем. просв. 2010. Вып. 14, С. 83–106; Варфоломеев, В. В. Вписанные многоугольники и полиномы Герона // Матем. сборник. 2003. Т. 194, № 3. С. 3–24; Варфоломеев, В. В. Группы Галуа полиномов Герона-Сабитова для пятиугольников, вписанных в окружность // Матем. сборник. 2004. Т. 195, № 2. С. 149–162; Крыжановский, Д. А. Изопериметры. М. : Физматгиз, 1959. 90 с.; Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. М. : МЦНМО, 2001. 584 с.; Сабитов, И. Х. Объемы многогранников. М. : МЦНМО, 2002. 32 с.; Connelly, R. Comments on generalized Heron polynomials and Robbins' conjectures. Preprint, Cornell University, 2004; Fedorchuk, Pak I. M. Rigidity and polynomial invariants of convex polytopes // Duke Math. J. 2005. V. 129. P. 371–404; Landers, P. Dying Mathematician Spends Last Days on Area of Polygon // WSJ. 2003. P. 1; Pak, I. The area of cyclic polygons: recent progress on Robbins Conjecture // Adv. Applied Math. 2005. V. 34. P. 690–696; Pak, I. Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry. Cambridge University Press, 2009. 438 p.; Robbins, D. Areas of polygons inscribed in a circle // Discrete and Comput. Geometry. 1994. V. 12, №2. P. 223–236; Robbins, D. Areas of polygons inscribed in a circle // Amer. Math. Monthly. 1995. V. 102, № 6. P. 523–530.

Исследование многоугольников плоскости Лобачевского берет свое начало в работах Н. И. Лобачевского и активно развивается в наши дни[8]. С выходом исследований на идеальную область плоскости Лобачевского зарождается новое направление – решение многоугольников плоскости $\hat{H}$, в рамках которого естественно встает задача вычисления площадей n-реберников. Некоторые многоугольники на $\hat{H}$ исследованы в работах Л. Н. Ромакиной[9].

В данной работе приведено доказательство основной теоремы[10] о выражении площади прямоугольного трехреберника через длины его катетов, позволяющая элементарными методами вычислять площади различных фигур.

Трехвершинником плоскости $\widehat{H}$ назовем совокупность трех не лежащих на одной прямой точек и трех отрезков, циклически соединяющих эти точки. Данные точки назовем *вершинами*, отрезки – *ребрами*, а прямые, содержащие отрезки, – *сторонами трехвершинника*. Каждые две стороны трехвершинника

---

[8] Бибиков, П. В. Описанные циклические линии треугольника в геометрии Лобачевского // Матем. просв. 2009. Вып. 13. С. 142–148; Петров, Ф. В. Вписанные четырёхугольники и трапеции в абсолютной геометрии // Матем. просв. 2009. Вып. 13. С. 149–154; Акопян, А. В. О некоторых классических конструкциях в геометрии Лобачевского // Матем. просв. 2009. Вып. 13. С. 155–170.

[9] Ромакина, Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 14–26; Ромакина, Л. Н. Конечные замкнутые 5-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 38–49; Ромакина, Л. Н. Гиперболические параллелограммы плоскости $\hat{H}$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 3. С. 43–52; Ромакина, Л. Н. Параболические параллелограммы плоскости $\hat{H}$ // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 20–28; Romakina, L. N. About a trapeze of the type Hee(I) on a hyperbolic plane of positive curvature // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2015. Vol. 2, iss. 1. P. 1–11.

[10] Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, № 1. С.127−147.

разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две или три части, ту из этих частей, которая содержит не принадлежащее данным сторонам ребро трехвершинника, будем называть *углом трехвершинника*, противолежащим указанному ребру, уточняя при необходимости тип угла[11].

Точку M плоскости $\widehat{H}$, не принадлежащую трехвершиннику F, назовем *внутренней* относительно F, если каждая проходящая через M прямая имеет с F две общие точки. Непустое множество всех внутренних относительно F точек плоскости $\widehat{H}$ назовем *внутренностью* F. Трехвершинник плоскости $\widehat{H}$, обладающий внутренностью, назовем *трехреберником*.

Площадью трехреберника назовем площадь его внутренности[12].

Имеет место следующий критерий принадлежности трехвершинника классу трехреберников: *трехвершинник плоскости $\widehat{H}$ является трехреберником тогда и только тогда, когда существует прямая, не проходящая через вершины трехвершинника и имеющая с ним две и только две общие точки*[11].

Трехреберник плоскости $\widehat{H}$ назовем *прямоугольным*, если он имеет пару ортогональных сторон[12]. Ребро, противолежащее прямому углу прямоугольного трехреберника, назовем *гипотенузой*, а два других ребра – *катетами* данного трехреберника[12].

Теорема 2. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S прямоугольного трехреберника с гиперболическим* (*эллиптическим*) *катетом длиной b* (a) *может быть вычислена по формуле* [12]

$$S = -\rho^2 \ln \frac{\sin\frac{a}{\rho}+\cos\frac{a}{\rho}\operatorname{sh}\frac{b}{\rho}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\rho}+\operatorname{ch}\frac{b}{\rho}\sin\frac{a}{\rho}}.$$

Применяя основную теорему о площади прямоугольного трехреберника,

---

[11] Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

[12] Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, № 1. С.127–147.

можно элементарными методами получить формулы для вычисления площадей различных фигур плоскости $\hat{H}$. В работе приведены следующие примеры.

Трехреберник плоскости $\widehat{H}$ назовем *дважды прямоугольным*, если он имеет две пары ортогональных сторон[13].

Теорема 3. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S дважды прямоугольного трехреберника с основанием длиной b и эллиптическим углом величиной B справедливы равенства*[13]

$$S = b\rho, \;\; S = b\rho^2.$$

В частном случае гипотенуза прямоугольного трехреберника может принадлежать гиперболической прямой. Утверждение о площади такого трехреберника сформулировано в теореме 4.

Теорема 4. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S прямоугольного трехреберника с параболической гипотенузой и гиперболическим (эллиптическим) катетом длиной b (a) справедливо равенство*[13]

$$S = \rho^2 \ln \operatorname{ch}\frac{b}{\rho} \qquad \left(S = -\rho^2 \ln \cos\frac{a}{\rho}\right).$$

Ячейкой первых моноэдральных разбиений[14] плоскости $\hat{H}$ является простой 4-контур. Доказано[15], что в простом 4-контуре диагонали ортогональны и разделены точкой их пересечения пополам. Следовательно, диагонали простого 4-контура разбивают этот контур на четыре равных прямоугольных трехреберника с параболической гипотенузой. Из теоремы 4

---

[13] Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, № 1. С.127–147.

[14] Ромакина, Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. сб. 2012. Т. 203, вып. 9. С. 83–116. In English: Sb. Math. 2012. Vol. 203, iss.

[15] Ромакина, Л. Н. Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 14–26. 9. P. 1310-1341.

вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S простого 4-контура, длина гиперболической* (*эллиптической*) *диагонали которого равна* $2b$ ($2a$), *имеет место равенство*[16]

$$S = 4\rho^2 \ln \operatorname{ch} \frac{b}{\rho} \qquad \left(S = -4\rho^2 \ln \operatorname{ch} \frac{a}{\rho}\right).$$

Инварианты построенных простых разбиений плоскости $\hat{H}$ можно выразить[17] через инварианты Δ простых 4-контуров, составляющих разбиения. Поэтому представляет особый интерес формула связи между площадью простого 4-контура и его инвариантом Δ.

Теорема 6. *На плоскости $\widehat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ для площади S простого 4-контура с инвариантом Δ справедливо равенство*[16]

$$S = 4\rho^2 \ln(-\Delta).$$

Многоугольником называем n-реберник без параболических ребер. Если n-реберник частично выходит на идеальную область плоскости $\hat{H}$, т.е. на плоскость Лобачевского, его называем *обобщенным*. В следующей теореме[18] установлена формула площади обобщенного многоугольника плоскости $\hat{H}$.

Теорема 7. *Пусть F – обобщенный многоугольник плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in R_+$. Через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначим вершины многоугольника F. Меры, внутренних углов многоугольника F в вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначим*

---

[16] Ромакина, Л. Н. Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны // Дальневост. матем. журн. 2013. Т. 13, № 1. С. 127–147.

[17] Ромакина, Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. сб. 2012. Т. 203, вып. 9. С. 83–116. In English: Sb. Math. 2012. Vol. 203, iss. 9. P. 1310-1341.

[18] Romakina, L. N. The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2016. V. 10, iss. 4. P. 293–310.

через $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$ *соответственно. Тогда площадь* $S_{\hat{H}}(F)$ *многоугольника* F *может быть выражена формулой*[19]

$$S_{\hat{H}}(F) = \rho^2\left(\sum_{j=1}^{n} \tau_j \widehat{A_j} - i\pi(n-2)\right),$$

где: $\tau_j = 1$ ($\tau_j = i$), если вершина A_j является абсолютной или собственной (идеальной).

В пункте 3.5 представлено самостоятельное исследование.

Любые две прямые расширенной гиперболической плоскости H^2 имеют не более одного общего перпендикуляра. Поэтому на плоскости $\hat{H}$, как и на плоскости Лобачевского, не существует четырехреберника с четырьмя прямыми углами. Четырехреберник с тремя прямыми углами назовем *трипрямоугольником*.

Пусть в произвольном трипрямоугольнике *ABCD* углы при последовательно взятых вершинах *D*, *A*, *B* являются прямыми квазиуглами. Поскольку $AB \perp AD$, прямые *AB* и *AD* непараболические и разных типов. Предположим, что *AB* (*AD*) – гиперболическая (эллиптическая) прямая. Из условия $BC \perp AB$ ($CD \perp AD$) следует, что прямая BC (CD) эллиптическая (гиперболическая). Поэтому внутренний угол трипрямоугольника *ABCD* при вершине *C* является квазиуглом, назовем его *свободным* углом трипрямоугольника *ABCD*. Вершину *A* (*C*) трипрямоугольника *ABCD* назовем *основной* (*свободной*), а вершину *B* (*D*) – *гиперболической* (*эллиптической*). Ребро *AB* (*AD*) назовем *основным гиперболическим* (*эллиптическим*), а ребро *CD* (*BC*) – *свободным гиперболическим* (*эллиптическим*). Прямую, содержащую ребро трипрямоугольника, назовем его *стороной*. Тип стороны трипрямоугольника определим соответственно типу принадлежащего ей ребра.

Заметим, что эллиптические стороны трипрямоугольника проходят через

---

[19] Romakina, L. N. The area of a generalized polygon without parabolic edges of a hyperbolic plane of positive curvature // Asian Journal of Mathematics and Computer Research. 2016. V. 10, iss. 4. P. 293–310

полюс его основной гиперболической стороны. Этот полюс не принадлежит ребрам трипрямогольника, так как в противном случае граница трипрямоугольника имеет самопересечение. Поэтому эллиптические ребра трипрямоугольника – короткие отрезки, не превышающие половины эллиптической прямой.

В работе доказана теорема о свободном угле трипрямоугольника.

Теорема 8. *Внутренний угол при свободной вершине трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$ является гиперболическим квазиуглом.*

Мера гиперболического квазиугла плоскости $\hat{H}$ равна $\alpha_0 + i\frac{\pi}{2}$, где α_0 – вещественное положительное число[20]. Поэтому согласно теореме 8 сумма мер внутренних углов трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$ равна $2i\pi + \alpha_0$, где α_0 – вещественная часть меры свободного квазиугла данного трипрямоуглльника. Применение теоремы 7 позволяет сформулировать следующую теорему[21].

Теорема 9. *Площадь S трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$, мера α свободного квазиугла которого равна $\alpha_0 + i\frac{\pi}{2}$, может быть вычислена по формуле*

$$S = \rho^2\left(\alpha - i\frac{\pi}{2}\right) = \alpha_0\,\rho^2.$$

Теорема 10 дает выражение площади произвольного трехреберника плоскости $\hat{H}$ через меры его внутренних углов[22].

---

[20] Ромакина, Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны : в 4 ч. Ч. 1 : Тригонометрия Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2013. 244 с.

[21] Клычкова, В. А. Трипрямоугольник гиперболической плоскости положительной кривизны // Современный взгляд на будущее науки : сб. статей Междунар. науч.-практ. конф. (25 мая 2016 г., г. Томск). В 5 ч. Ч. 5. Томск : АЭТЕРНА, 2016. С. 14–17.

[22] Ромакина, Л. Н. О площади трехреберника на гиперболической плоскости положительной кривизны // Матем. тр. 2014. Т. 17, вып. 2. С. 184–206. In English: L. N. Romakina, On the area of a trihedral on a hyperbolic plane of positive curvature, Sib. Adv. Math. 2015. V. 25, iss. 2. P. 138–153. DOI: 10,3103 / S1055134415020042.

Теорема 10. *На плоскости $\hat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in R_+$, площадь S трехреберника с величинами A, B, C внутренних углов при вершинах может быть вычислена по формуле*

$$S = \rho^2(A + B + C - i\pi).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью магистерской работы является исследование трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$, доказательство формулы его площади. Для достижения цели был освоен теоретический материал по геометрии плоскости $\hat{H}$, подготовлено изложение теории площадей фигур данной плоскости, самостоятельно исследован трипрямоугольник плоскости $\hat{H}$. Внимание работы сосредоточено на развивающейся в настоящее время теории площадей плоскости $\hat{H}$. Результаты самостоятельного исследования доложены на научном семинаре кафедры геометрии СГУ и опубликованы в статье [1]. В совокупности с результатами работ Л. Н. Ромакиной они могут составить основу научной монографии по теории площадей плоскости $\hat{H}$.

В перспективе исследования трипрямоугольника плоскости $\hat{H}$ мы видим вывод всевозможных выражений его площади через длины ребер и длины диагоналей, а также проведение классификации трипрямоугольников в зависимости от типов диагоналей, установление метрических зависимостей для трипрямоугольников различных типов.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ РАБОТЫ

1. Клычкова, В. А. Трипрямоугольник гиперболической плоскости положительной кривизны // Современный взгляд на будущее науки : сб. статей Междунар. науч.-практ. конф. (25 мая 2016 г., г. Томск). В 5 ч. Ч. 5. Томск : АЭТЕРНА, 2016. С. 14–17.