Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Линейные связности на многообразиях с симплектической и почти контактной метрической структурой

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента (ки) 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки,

профиль подготовки: Дифференцируемые многообразия и интегрируемые системы

механико-математического факультета

ШЕСТАКОВА ЕВГЕНИЯ НИКОЛАЕВИЧА

фамилия. имя, отчество

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н., доцент ______________________ С.В. ГАЛАЕВ

должность, уч. степень, уч. звание подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН

должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Теория линейных связностей занимает важное место в геометрии дифференцируемых многообразий. На римановом многообразии существует каноническая связность с нулевым кручением, называемая связностью Леви-Чивита. На симплектическом многообразии в общем случае вместо одной выделенной связности существует бесконечно много симметрических связностей, совместимых с симплектической структурой. В некоторых специальных случаях удается получить единственную симплектическую связность. К таким случаям, прежде всего, следует отнести случай кэлерова многообразия. Изучению симплектических связностей посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных математиков[1]. Почти контактные метрические многообразия имеют много общего с симплектическими многообразиями, однако основное различие весьма существенно: симплектические многообразия всегда имеют четную размерность, а почти контактные метрические многообразия (ПКММ) – нечетную.

Проблема существования специальных связностей на ПКММ в настоящее время является весьма актуальной. Специальные связности почти контактных метрических пространств (в том числе и связности, совместимые с допустимой симплектической структурой) находят применения в теоретической физике, а также в геометрической теории интегрируемых гамильтоновых систем[2].

---

[1] Лемлейн, В. Г. Тензор кривизны и некоторые типы пространств симметричной почти симплектической связности // ДАН СССР. 1957. Т.115, №4. С. 655–658; Галаев, С. В. Почти симплектические связности на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 28–31; Галаев, С. В. Неголономные почти симплектические многообразия с присоединенной связностью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 31–33; Трофимов, В. В. О связностях абсолютного параллелизма на симплектическом многообразии // УМН. 1993. Т. 48, № 1. С. 191–192; Gelfand, I. Fedosov manifolds // arXiv:dgga/ 9707024 v2 5sep1997.

[2] Трофимов, В. В. Алгебра и геометрия интегрируемых дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1995. С. 102–126.

Цели и задачи. Целью магистерской диссертации является определение аналога симплектической связности для многообразия с почти контактной метрической структуры и изучение свойств построенной связности.

Достижение поставленной цели потребовало решения следующих задач.

1. Познакомиться с работами, в которых излагаются основы симплектических многообразий и симплектических связностей[3].

2. Используя работы, исследовать связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена, определяемые на многообразии с почти контактной метрической структурой[4].

3. Дать определение N-продолженной симплектической связности и доказать ее существование.

4. Найти условия, при которых связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена являются N-продолженными симплектическими связностями.

Описание структуры работы. Работа состоит из введения, двух разделов, списка использованных источников, содержащего 20 наименований. Объем работы составляет 53 страницы.

Научная новизна и значимость работы. Научная новизна работы заключается в доказательстве существования N-продолженной связности, как аналога симплектической связности на почти контактном многообразии.

Положения, выносимые на защиту. Доказательство существования N-продолженной связности; доказательство условий, при которых связности являются N-продолженными связностями.

Краткая характеристика материалов работы. Магистерская диссертация состоит из двух разделов. Первый раздел содержит реферативный

---

[3] Галаев, С. В. Внутренняя геометрия метрических почти контактных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2012. Т. 12. Сер. Матем. Мех. Информ, вып. 1. С. 16-22; Bejancu, A. Kahler contact distributions // Journal of Geometry and Physics. 2010. V. 60. P. 1958–1967.

[4] Галаев, С. В. Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Изв. вузов. Матем. 2014. №8. С. 42–52.

материал и является кратким введением в теорию симплектических связностей.

Второй раздел начинается с изложения основных понятий теории почти контактных метрических пространств. Вводная часть второго раздела содержит некоторые самостоятельные результаты, к которым следует отнести изложение свойств адаптированных координат и допустимых тензорных полей. Далее на почти контактном метрическом многообразии M вводится понятие допустимой симплектической структуры. Определяются внутренняя и N-продолженная симплектические связности. Изучаются свойства построенных связностей. Устанавливается соответствие между классом N-продолженных связностей и подклассом линейных связностей на многообразии с контактной метрической структурой. Находятся условия, при которых связности Танака-Вебстера и Схоутена-ван Кампена являются N-продолженными симплектическими связностями. Рассматриваются случаи естественного возникновения N-продолженных симплектических связностей на многообразиях с почти контактной метрической структурой.

ОСНОВНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть M – многообразие класса C^{∞}. Обозначим через ГТМ модуль векторных полей класса C^{∞} на многообразии M над кольцом гладких функций.

Определение 1. *Линейной связностью* на многообразии M является отображение ∇, сопоставляющая каждому векторному полю X некоторое линейное отображение $\nabla_X: \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$, обладающее тем свойством, что для любых функций $f, g \in C^{\infty}(M)$, и любых полей $X, Y, Z \in \chi(M)$, имеют место соотношения[5]:

1) $\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y$,

2) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

---

[5] Борисенко, А.А., Ямпольский А. Л. Риманова геометрия расслоений // УМН. 1991. Т. 46, вып. 6. С. 51–95.

Рассмотрим тензорное расслоение $T_q^p(M) = \cup T_q^p(T_x)$. Имеется естественная проекция $p: T_q^p(M) \longrightarrow M$, такая что $p\left(T_q^p(x)\right) = x, x \in M$. Известно, что $T_q^p(M)$ есть дифференциальное многообразие класса C^∞ и проекция $p: T_q^p(M) \longrightarrow M$ есть дифференциальное отображение.

Определение 2. *Тензорным полем типа (p,q)* класса C^∞ на многообразии М называется сечение класса C^∞ расслоения $p: T_q^p(M) \longrightarrow M$, то есть отображение $Q: M \longrightarrow T_q^p(M)$ класса C^∞, которое обладает свойством

$$p \circ Q = id_M.$$ [5]

Определение 3. *Линейной дифференциальной формой* на многообразии М мы будем называть произвольное $C^\infty(M)$-линейное отображение $C^\infty(M)$-модуля $\chi(M)$ в алгебру $C^\infty(M)$ (рассматриваемую как $C^\infty(M)$$ - модуль). Таким образом, каждая форма ω сопоставляет любому векторному полю $X \in \chi(M)$ некоторую гладкую на М функцию $\omega(X)$, причем для любой гладкой на М функции f и любых полей $X, X_1, X_2 \in \chi(M)$ имеют место равенства (см. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л., 1991):

1) $\omega(fX) = f\omega(X)$;

2) $\omega(X_1 + X_2) = \omega(X_1) + \omega(X_2)$.

Определение 4. Тензорным полем типа (p,q) на многообразии М мы будем называть произвольную $C^\infty(M)$-линейную по каждому аргументу функцию $T(\omega_1, \dots, \omega_p; X_1, .. X_q)$ от p+q аргументов, первые p из которых представляют собой линейные дифференциальные формы $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Omega^1(M)$, а последние – q-векторные поля $X_1, \dots, X_2 \in \chi(M)$ (см. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л., 1991).

Множество всех тензорных полей типа (p,q) на многообразии М мы будем обозначать символом $T_q^p(M)$. Под определением связности будем понимать ковариантную производную векторного поля.

Определение 5. *Симплектическим* многообразием называется четномерное многообразие M с невырожденной и замкнутой 2-форма ω (см. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л., 1991).

Пусть ∇ – ковариантная производная на M. Будем говорить, что ∇ сохраняет ω, если $\nabla\omega = 0$. Равенство $d\omega = 0$ или $d\left(\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j\right) = 0$ означает замкнутость формы.

Ковариантная производная ∇ является симметричной (или не имеет кручения), если

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Определение 6. Если ковариантная производная ∇ симметрична и сохраняет данную *симплектическую* форму ω, тогда мы можем говорить, что ∇ – *симплектическая* связность[6].

Определение 7. *Федосово* многообразие – симплектическое многообразие с данной симплектической связностью (Gelfand, I., 1997).

Пусть *M* – гладкое многообразие нечетной размерности $n=2m+1$, а ГТМ – модуль гладких векторных полей на *X*. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана *почти контактная метрическая* структура

$$(\varphi, \vec{\xi}, \eta, g),$$

где φ – тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом, $\vec{\xi}$ и η – вектор и ковектор, называемые, соответственно, структурным вектором и контактной формой, g – (псевдо) риманова метрика. Пусть D – гладкое распределение коразмерности 1, определяемое формой η, $D^\perp = Span(\vec{\xi})$ – его оснащение: $TX = D \oplus D^\perp$. Если ограничение формы ω = $d\eta$ на распределении D дает невырожденную форму, то в этом случае вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta(\vec{\xi}) = 1$, k$^{er\ \omega}$ = Span($\vec{\xi}$) и называется вектором Риба.

---

[6] Gelfand, I. Fedosov manifolds // arXiv:dgga/ 9707024 v2 5sep1997.

Будем называть *D* распределением почти контактной метрической структуры.

Определение 8. Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим* многообразием[7].

Определение 9. Тензорное поле t типа (p,q), заданное на почти контактном многообразии, назовем *допустимым* (*к распределению D*), если t обращается в нуль, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η (D. Janssens, 1981).

Из определения почти контактной структуры следует, что аффинор φ является допустимым тензорным полем типа (1,1). Поле аффинора φ, учитывая его свойства, мы называем допустимой почти комплексной структурой. Допустимую замкнутую внешнюю дифференциальную 2-форму максимального ранга будем называть *допустимой симплектической* 2-формой (см. D. Janssens, 1981). Таким образом, в контактном случае форма ω = $d\eta$ представляет собой естественный пример *допустимой симплектической* формы.

Теорема 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического пространства в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^{c} = \Gamma_{ab}^{c},\ \tilde{\Gamma}_{ab}^{n} = \omega_{ba} - C_{ab},\ \ \tilde{\Gamma}_{an}^{b} = \tilde{\Gamma}_{na}^{b} = C_{a}^{b} - \psi_{a}^{b},\ \ \tilde{\Gamma}_{na}^{n} = \tilde{\Gamma}_{nn}^{\alpha} = 0,$$

где $\Gamma_{bc}^{a} = \frac{1}{2} g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_{bc})$.

Под внутренней линейной связностью на многообразии с почти контактной метрической структурой понимается отображение

$$\nabla: \Gamma D \times \Gamma D \to \Gamma D,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$,

2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

где ΓD – модуль допустимых векторных полей. Коэффициенты линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma_{ab}^{c}\vec{e}_c$.

---

[7] Janssens, D. Almost contact structures and curvature tensors // Kodai Math. J. 4, 1981. P. 1–27.

Кручение внутренней связности S по определению полагается равным

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}].$$

Если кручение внутренней связности равно нулю и $\nabla g = 0$, то соответствующую связность будем называть внутренней метрической связностью без кручения.

Пусть ∇ – внутренняя линейная связность, определяемая горизонтальным распределением HD, и $N: D \to D$ – поле допустимого тензора типа (1,1).

N-продолженной связностью назовем связность в векторном расслоении (D, π, M), определяемую разложением $TD =$ HD $\oplus$ VD, такую, что

$$\widetilde{HD} = HD \oplus Span(\vec{u}),$$

где $\vec{u}_{\vec{x}} = \vec{\varepsilon} - (N\vec{x})^v$, $\vec{\varepsilon} = \partial_n$, $\vec{x} \in D$, $(N\vec{x})^v$ – вертикальный лифт.

Относительно базиса $(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ поле $\vec{u}$ получает следующее координатное представление: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$.

Назовем кручением N-продолженной связности кручение исходной внутренней связности. Будем использовать следующее обозначение для N-продолженной связности: $\nabla^N = (\nabla, N)$, где ∇ – внутренняя связность. N-продолженную связность назовем метрической, если ∇ – внутренняя симметричная метрическая связность и выполняется равенство

$$\nabla^N{}_{\vec{\xi}} g_{ab} = \partial_n g_{ab} - N_a^c g_{cb} - N_b^c g_{ac} = 0.$$

Допустимое тензорное поле, определяемое равенством

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}],$$

где Q=1-P, названо Вагнером тензором кривизны Схоутена[8].

Выражение для тензора кривизны N-продолженной связности:

$$K(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = 2\omega(\vec{x},\vec{y})N\vec{z} + R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}, \quad K(\vec{\xi},\vec{x})\vec{y} = P(\vec{x},\vec{y}) - (\nabla_{\vec{x}}N)\vec{y},$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma D$.

---

[8] Вагнер, В. В. Геометрия (n–1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

Можно показать, что для контактного метрического пространства при n > 3 обращение в нуль тензора кривизны Вагнера эквивалентно выполнению равенств $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}=0$, $P(\vec{x},\vec{y})=0$. В более общем случае N-продолженной связности имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть M – многообразие размерности n, n> 3, наделенное контактной метрической структурой, тогда условие $N=0$ является необходимым для обращения в нуль тензора кривизны N-продолженной связности[9].

Теорема 3. На многообразии с контактной метрической структурой существует N-продолженная метрическая связность, однозначно определяемая следующими условиями:

1) $\vec{z}g(\vec{x},\vec{y})=g(\nabla_{\vec{z}}\vec{x},\vec{y})+g(\vec{x},\nabla_{\vec{z}}\vec{y})$ (свойство метричности),

2) $\nabla_{\vec{x}}\vec{y}-\nabla_{\vec{y}}\vec{x}-P[\vec{x},\vec{y}]=\vec{0}$ (отсутствие кручения),

3) N – симметрический оператор, такой, что

$$g(N\vec{x},\vec{y})=\frac{1}{2}L_{\vec{\xi}}g(\vec{x},\vec{y}),$$

где $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma D$ – сечения распределения D.

Теорема 4. Пусть ∇^N – произвольная N-продолженная связность без кручения. Рассмотрим тензоры N_1 и N_2, определяемые, соответственно, равенствами

$$\nabla^N_{\vec{x}}\omega(\vec{y},\vec{z})=\omega(N_1(\vec{x},\vec{y}),\vec{z}),\ \nabla^N_{\vec{\xi}}\omega(\vec{y},\vec{z})=\omega(N_2\vec{y},\vec{z}),\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\Gamma D.$$

Тогда, связность ∇^{N_2}, определяемая условиями

$$\nabla^{N_2}_{\vec{x}}\vec{y}=\nabla^N_{\vec{x}}\vec{y}+\frac{1}{3}N_1(\vec{x},\vec{y})+\frac{1}{3}N_1(\vec{y},\vec{x})$$

$$\nabla^{N_2}_{\vec{\xi}}\vec{y}=\nabla^N_{\vec{\xi}}\vec{y}+\frac{1}{2}N_2\vec{y},\ \vec{x},\vec{y}\in\Gamma D,$$

является N-продолженной связностью.

---

[9] Вагнер, В. В. Геометрия (n–1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // М. : Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173–255.

Связность Танака-Вебстера ∇^* определяется с помощью равенства:

$$\nabla^*{}_{\vec{x}}\vec{y} = \widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} + \eta(\vec{x})\varphi\vec{y} - \eta(\vec{y})\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + \left(\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\eta\right)(\vec{y})\vec{\xi}.$$

Отличными от нуля коэффициентами связности Танака-Вебстера будут

$$\Gamma^*{}^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab},\ \Gamma^*{}^a_{nb} = C^a_b.$$

Таким образом, связность Танака-Вебстера является N-связностью для эндоморфизма $N = C$.

Еще одним примером N-связности является связность ∇^{**} Схоутена-ван Кампена:

$$\nabla^{**}{}_{\vec{x}}\vec{y} = \widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{y} - \eta(\vec{y})\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\vec{\xi} + \left(\widetilde{\nabla}_{\vec{x}}\eta\right)(\vec{y})\vec{\xi}.$$

В этом случае мы имеем: $\Gamma^{**}{}^c_{ab} = \tilde{\Gamma}^c_{ab},\ \Gamma^{**}{}^a_{nb} = C^a_b - \varphi^a_b.$

Изучение связностей, сохраняющих гладкое распределение, мотивировано задачами механики со связями. К введению N-продолженной связности привели попытки дать инвариантное описание связности, используемой В. В. Вагнером для построения тензора кривизны неголономного многообразия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Симплектическая геометрия – область дифференциальной геометрии и дифференциальной топологии, изучающая симплектические многообразия: гладкие многообразия с выбранной замкнутой невырожденной 2-формой. Исходно симплектическая геометрия возникла из гамильтонова формализма в классической механике, когда фазовое пространство для классической системы оказывалось симплектическим многообразием.

Симплектическая геометрия имеет как сходства, так и различия с римановой геометрией, изучающей многообразия с выбранной квадратичной положительно определённой формой – метрическим тензором, – позволяющей определить расстояния на многообразии. В отличие от случая римановой геометрии, на симплектических многообразиях нет локального инварианта, каким в римановом случае является кривизна. Это следует из теоремы Дарбу, утверждающей, что достаточно малая окрестность любой точки 2n-мерного симплектического многообразия изоморфна некоторой области $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой $\omega = \sum_j dp_j \wedge dg_j$. Ещё одним отличием от римановой геометрии является то, что не на любом многообразии можно задать симплектическую структуру: имеется ряд топологических ограничений. Так, многообразие должно быть чётномерным.

Основной целью работы было нахождения аналога симплектической связности на почти контактном метрическом многообразии. Самостоятельно были изучены основы симплектических многообразий и симплектических связностей, исследованы связности на почти контактном метрическом многообразии и доказано существование. Найдена связность с допустимой симплектической структурой.