Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяция многочленами пятой степени

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 228 группы

направления 02.04.01 – Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Османова Фархада Нисрединовича

Научный руководитель

кандидат ф.-м. наук, доцент	______________	Ю.В.МАТВЕЕВА
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

доктор ф.-м. наук, профессор	______________	Д.В.ПРОХОРОВ
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

САРАТОВ 2016

Введение

Пусть $\overline{T}=(A_1A_2A_3)-$ замкнутый невырожденный треугольник на плоскости. Пусть также $f\in C^4(\overline{T})$ и $\forall B\in\overline{T}$ будет $|D^4f(B)|\le M_4$, где $D^4f(B)-$ всевозможные частные производные 4-го порядка.

Рассмотрим задачу приближения функции кубическими многочленами на треугольнике. Имеются следующие результаты:

В статье Женишека[1] в качестве такого условия выбрано равенство производных многочлена и функции по направлению нормали в средней точке наименьшей стороны, получены оценки отклонения производных первого порядка.

Теорема 1 (Женишек)**.** Пусть $\overline{T}=(A_1A_2A_3)-$ замкнутый невырожденный треугольник на плоскости со сторонами $a\le b\le c$ и углами $\alpha\le\beta\le\gamma$. Пусть $f\in C^4(\overline{T})$ и $\forall B\in\overline{T}$ будет $|D^4f(B)|\le M^4$. Пусть многочлен $Q(X)$ удовлетворяет условиям:

$$Q(A_i)=f(A_i),\quad \frac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}}=\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}},\quad \frac{\partial^2 Q(A_i)}{\partial e_{ij}\partial e_{ik}}=\frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial e_{ij}\partial e_{ik}}, \tag{1}$$
$$i\ne j,\quad 1\le i,j\le 3.$$

$$\frac{\partial Q(P_{12})}{\partial n_{12}}=\frac{\partial f(P_{12})}{\partial n_{12}} \tag{2}$$

где $P_{12}-$ средняя точка наименьшей стороны, $n_{12}-$ нормаль к наименьшей стороне. Тогда $\forall B\in\overline{T}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f(B)}{\partial x_i}-\frac{\partial Q(B)}{\partial x_i}\right|\le\frac{4}{15}\left(1+5\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)\frac{M_4c^3}{\sin\beta},\quad i=1,\ 2.$$

В статье Субботина[2] в качестве интерполяционного условия выбрано равенство производных в средней точке наименьшей стороны по направлению наибольшей стороны и получены оценки для отклонения частных производных до пятого порядка включительно, которые зависят от синуса наибольшего угла треугольника.

Теорема 2 (Субботин)**.** Пусть $\overline{T}=(A_1A_2A_3)-$ замкнутый невырожденный треугольник на плоскости с углами $\alpha\le\beta\le\gamma$ и d-диаметр треугольника. Пусть $f\in C^4(\overline{T})$ $\forall|i|=4$, $\forall B\in\overline{T}$ будет $|D^4f(B)|\le M_4$, при этом треугольник расположен так, что наибольшая сторона лежит по направлению x_1. Пусть многочлен $Q(x)$ удовлетворяет условиям (1), $P_{12}-$ средняя точка наименьшей стороны и

$$\frac{\partial f(P_{12})}{\partial x_1} = \frac{\partial Q(P_{12})}{\partial x_1}.$$

Тогда $\forall B \in \overline{T}$ справедливы неравенства

$$\left\| \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{n-k} \partial x_2^k} - \frac{\partial^k Q(x)}{\partial x_1^{n-k} \partial x_2^k} \right\|_C \leq C M_4 d^{4-k} \left[\max\left(2, \frac{1}{\sin\gamma}\right) \right]^k$$
$$0 \leq n \leq 3, \quad 0 \leq k \leq n.$$

В статье Матвеевой[3] рассматривается измененная задача работы Субботина[2]. Не накладываются ограничения на соотношения сторон, и оцениваются уже не частные производные, а производные по направлениям сторон.

Целью данной работы является построение интерполяционного многочлена 5-й степени, получение оценок отклонения $Q(x)$ и $f(x)$, а также их производных по направлениям сторон треугольника.

В моей магистерской работе рассмотрена одна глава, название которой интерполяция многочленами пятой степени. Эта глава подразделяется на три подглавы, такие как: барицентрические координаты, интерполяционный многочлен пятой степени, оценки приближения интерполяционного многочлена и функции. Также моя работа содержит приложение, в котором показывается приближение функции многочленом пятой степени на треугольнике.

Основное содержание работы

Пусть $\overline{T} = (A_1 A_2 A_3)$ – замкнутый невырожденный треугольник, $e_{ij} = \dfrac{\overline{A_i A_j}}{|A_i A_j|}$, $f(x)$ – функция, определенная на треугольнике.

Лемма 7. Пусть $\overline{T} = (A_1 A_2 \ldots A_{m+1})$– замкнутый m-мерный симплекс, $G \supset \overline{T}$ – открытое множество, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$– барицентрические координаты точки x, функция $f = f(x)$ имеет непрерывные производные по любому направлению в G. Тогда

$$\forall x \in \overline{T} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial e_{ij}} = \frac{1}{|A_i A_j|} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \tag{3}$$

Теорема 8. Пусть f определена на $\overline{T} = (A_1 A_2 A_3)$. Тогда существует единственный многочлен $Q(x)$ степени 5 с действительными коэффициентами, интерполирующий функцию f и удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} Q(A_i) = f(A_i), \\ \dfrac{\partial Q(A_i)}{\partial e_{ij}} = \dfrac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}}, \\ \dfrac{\partial^2 Q(A_i)}{\partial e_{ij}\partial e_{ik}} = \dfrac{\partial^2 f(A_i)}{\partial e_{ij}\partial e_{ik}}, \\ \dfrac{\partial Q(P_{ij})}{\partial \overline{n}_{ij}} = \dfrac{\partial f(P_{ij})}{\partial \overline{n}_{ij}}, \end{cases} \tag{4}$$

где $1 \le i \ne j \le 3$, $P_{ij}-$ средняя точка отрезка A_iA_j, а $\overline{n}_{ij}-$ нормаль к A_iA_j.

Таким образом, многочлен $Q(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{i=1}^{3} f(A_i)x_i^5 + 10 \sum_{1\le i\ne j\le 3} f(A_i)x_i^4x_j \ + 10 \sum_{1\le i\ne j\le 3} f(A_i)x_i^3x_j^2 + \\ &+ 20 \sum_{1\le i\ne j\ne k\le 3} f(A_i)x_i^3x_jx_k \ + \sum_{1\le i<j\le 3} |A_iA_j| \left(\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}}x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial e_{ji}}x_j\right) x_i^3x_j^3 + \\ &+ 4 \sum_{1\le i<j\le 3} |A_iA_j| \left(\frac{\partial f(A_i)}{\partial e_{ij}}x_i + \frac{\partial f(A_j)}{\partial e_{ji}}x_j\right) x_i^2x_j^2 + \\ &+ \sum_{1\le i<j\le 3} \frac{|A_iA_j|^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial e_{ij}^2}x_i + \frac{\partial^2 f(A_j)}{\partial e_{ij}^2}x_j\right) x_i^2x_j^2 + \\ &+ 4\Bigg(|A_1A_2|\frac{\partial f(A_1)}{\partial e_{12}}x_1^2 + |A_1A_2|\frac{\partial f(A_2)}{\partial e_{21}}x_2^2 + |A_1A_3|\frac{\partial f(A_1)}{\partial e_{13}}x_1^2 + \\ &+ |A_1A_3|\frac{\partial f(A_3)}{\partial e_{31}}x_3^2 + |A_2A_3|\frac{\partial f(A_2)}{\partial e_{23}}x_2^2 + |A_2A_3|\frac{\partial f(A_3)}{\partial e_{32}}x_3^2\Bigg)x_1x_2x_3 + \\ &+ \sum_{1\le i\ne j\ne k\le 3} |A_iA_j||A_iA_k|\frac{\partial^2 f(A_i)}{\partial e_{ij}\partial e_{ik}}x_i^2x_1x_2x_3 + \\ &+ (a_{17}x_1x_2 + a_{18}x_1x_3 + a_{19}x_2x_3)x_1x_2x_3, \end{aligned} \tag{5}$$

где коэффициенты $a_{17},\ a_{18},\ a_{19}$ подсчитаны.

Получим оценки отклонения $Q(x)$ и $f(x)$, а также их производных до пятого порядка включительно по направлениям сторон треугольника. Но для начала докажем следующую теорему:

Теорема 10. Пусть функция $f \in C^6(\overline{T})$, $d(\overline{T}) = |A_2A_3|$ $-$ диаметр треугольника, M_6- максимум шестых производных функции $f(x)$ по всевозможным направлениям, $P_{12}, P_{13}, P_{23}-$ средние точки сторон A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 соответственно, $n_{ij}-$ вектор нормали, проведенный к стороне A_iA_j, $(1 \leq i, j \leq 3; i \neq j)$. Пусть интерполяционный полином пятой степени $Q(x)$ удовлетворяет условиям (4). Тогда справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^{n_1+n_2+n_3}(Q-f)(x)}{\partial e_{12}^{n_1}\partial e_{13}^{n_2}\partial e_{23}^{n_3}}\right| \leq \frac{CM_6 d^{6-n_3}(\overline{T})}{|A_1A_2|^{n_1}|A_1A_3|^{n_2}}, \tag{6}$$

$$n_i \geq 0,\ 0 \leq \sum_{i=1}^{5} n_i \leq 5,$$

Замечание 2. Заметим, что в доказанной теореме 10 отсутствуют визуально углы треугольника $\overline{T}$.

Заключение

В данной работе построен интерполяционный многочлен 5й степени с действительными коэффициентами, получены оценки отклонения $Q(x)$и $f(x)$, а также их производных до пятого порядка включительно по направлениям сторон треугольника, а также были изучены барицентрические координаты и их свойства

Список использованных источников

1 Zenisek,A. Maximum-angle condition and triangular finite element of Hermite type//Math. Comput. 1995. Vol.64, № 211, P. 929-941

2 Деклу, Ж. Метод конечных элементов. М. : Мир, 1976. 95 с.

3 Субботин, Ю.Н. Многомерная кратная полиноминальная интерполяция // Мет. аппр-ии и интерп-ии : сб. Новосибирск. 1981. С. 148-152.

4 Субботин, Ю.Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометричеких характеристик треугольника // Тр. ИММ УрО РАН. 1992. Т.2. С.110-119.

5 Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М. : Наука. Т.3. 1966. 656 с.

6 Александров, П. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. М. : Наука. 1968. 912 с.

7 Ciarlet, P. G. General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods/ P. A. Raviart // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1972. Vol. 46, № 3. P. 177-199.

8 Гончар, А.А. О кусочно полиномиальной аппроксимации // Мат. заметки. 1972. Т. 11, вып.2. С.129-134.

9 Субботин, Ю.Н. Погрешность аппроксимации интерполяционными многочленами малых степеней на n-симплексах // Мат. заметки. 1990г. Т. 48, вып. 4. С. 88–100.

10 Baidakova, N. V. A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proceeding of the Steklov Inst. of Math. 2005. Suppl. 2. P. 49-55.

11 Subbotin, Yu. N. A New Cubic Element in the FEM // Proceeding of the Steklov Inst. of Math. 2005. Suppl. 2. P. 176-187.

12 Стечкин,С.Б. Сплайны в вычислительной математике / Ю.Н. Субботин. М. : Наука. Гл. ред. физ-мат. 1976. 248 с.

13 Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Дж. Адамс. М. : Мир. 2001. 604 с.

14 Матвеева, Ю. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике//Соврем. методы теории функций и смежные пробл.:материалы конференции. Воронеж. 2007. С. 120-121.

15 Мелешкина, А. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена Эрмита на треугольнике//Вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, вып. 2. С. 211-220.

16 Мелешкина, А. Об оценке производной по направлению эрмитова сплайна на треугольнике//Матем., Механ. Саратов: Саратовский ун-т. 2007. вып. 9. С. 54-57