

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Численное моделирование оптимального фильтра Калмана. Создание
лабораторной работы в компьютерном практикуме по статистической
радиофизике.**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета

Калиничева Александра Александровича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ В.С. Анищенко

Саратов 2016

Характеристика работы

Работа посвящена актуальным вопросам линейной фильтрации сигналов и включает в себя разработку и исследование оптимального фильтра Калмана в среде Labview.

Целью выпускной квалификационной работы является разработка и создание новой лабораторной работы в компьютерном практикуме по статистической радиофизике на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Данная лабораторная работа посвящена изучению задач и методов линейной фильтрации на примере оптимального дискретного фильтра Калмана.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы, дается общее представление о задачах фильтрации и формулируется цель работы.

Проблема фильтрации представляет собой важнейший раздел теории оптимального радиоприема сигналов, а также теории автоматического управления [1-5]. Различают две задачи фильтрации: обнаружение полезного сигнала на фоне шумов и выделение сигнала из шума. Задача выделения сигнала из шума в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Пусть наблюдатель получает реализации случайного процесса $X(t)$, который будем называть наблюдаемым сигналом. Он представляет собой детерминированную функцию передаваемого полезного сигнала $X_c(t, \lambda(t))$ и некоторой помехи $X_{ном}(t)$:

$$X(t) = \Phi(X_c(t, \lambda(t)), X_{ном}(t)).$$

Полезный сигнал $X_c(t, \lambda(t))$ детерминированным образом связан с информационным сообщением $\lambda(t)$, а также может непосредственно зависеть от времени. Сообщение $\lambda(t)$, несущее полезную информацию, есть некий случайный процесс, реализации которого необходимо выделить из реализаций наблюдаемого сигнала $X(t)$. Помеха $X_{ном}(t)$, в общем случае,

включает две компоненты $X_{ном}(t) = v(t) + X_{шн}(t)$, где $v(t)$ – регулярная компонента, представляющая собой известную детерминированную функцию времени, например, какой-то периодический сигнал, а $X_{шн}(t)$ – случайная компонента помехи, называемая шумом наблюдения. Она обеспечивается внутренними шумами приемного устройства и внешними случайными факторами, воздействующими на вход приемного устройства. В общем случае все указанные сигналы являются векторными процессами и описываются векторными уравнениями.

Часто наблюдаемый сигнал можно представить в более простом виде, как

$$X(t) = X_c(t, \lambda(t)) + X_{шн}(t) \quad (1)$$

Это уравнение называют уравнением наблюдения. Здесь полагается, что $\Phi(x) = \chi$ и $v(t) \equiv 0$. Информационное сообщение предполагается заданным стохастическим дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(t, \lambda) + X_{фш}(t), \quad (2)$$

где $f(t, \lambda)$ – детерминированная заданная функция своих аргументов, а $X_{фш}(t)$ – случайный процесс, называемый формирующим шумом. Уравнение (2) называется уравнением сообщения. Начальное условие $\lambda(t_0) = \lambda_0$ задается распределением случайной величины λ_0 .

В зависимости от вида уравнений наблюдения (1) и сообщения (2) различают два класса задач фильтрации.

Линейная фильтрация соответствует случаю, когда совместное распределение совокупности процессов $\{X(t), \lambda(t)\}$ является гауссовым. Это требование выполняется, в случае уравнений (1) и (2), если они являются линейными относительно λ , начальное значение λ_0 имеет гауссово распределение, а источники шума $X_{шн}(t)$ и $X_{фш}(t)$ представляют собой независимые гауссовы источники.

Нелинейная фильтрация имеет место, если уравнение наблюдения и/или сообщения является нелинейным относительно λ , а также если

распределение λ_0 или хотя бы одного из источников шума не являются гауссовым.

В основе принципа фильтрации лежит критерий максимального правдоподобия Байеса. Фильтр, оптимальный по данному критерию, на основании последовательности наблюдений x_0, x_1, \dots, x_i , представляющих собой значения сигнала $X(t)$, измеряемые в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_i , формирует оценку сообщения $\lambda(t)$, соответствующую максимуму условной плотности вероятности $p(\lambda_i / x_0, x_1, \dots, x_i)$. При выполнении перечисленных выше условий линейной фильтрации может быть создан оптимальный линейный фильтр, строго удовлетворяющий критерию Байеса. Если эти условия нарушаются, например, один из источников шума не является гауссовым, то оптимальный фильтр должен быть нелинейным.

Первые основополагающие теоретические результаты по проблеме линейной фильтрации принадлежат А.Н. Колмогорову [6] и Н. Винеру [7]. Теория нелинейной фильтрации, применительно к марковским процессам, была разработана Р.Л. Стратоновичем [8]. Важную практическую роль играют физически реализуемые оптимальные и квазиоптимальные линейные фильтры, предложенные в работах Р.Е. Калмана и Р.С. Бьюси [9,10]. Одним из широко используемых на практике инструментов фильтрации данных является дискретный фильтр Калмана [1-3,9,11,12]. Принцип его функционирования основывается на том, что при фильтрации данных используется информация о характере самого явления.

В **разделе 1** дается краткое описание оптимального фильтра Калмана.

Пусть уравнения наблюдения и сообщения являются линейными относительно λ и имеют следующий простой вид:

$$X(t) = H(t)\lambda(t) + X_{\text{шн}}(t); \quad (3)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} + \alpha(t)\lambda = u(t) + X_{\text{фш}}(t), \quad (4)$$

где $H(t)$, $u(t)$, $\alpha(t)$ – известные детерминированные функции времени или константы. Источники шума $X_{шн}(t)$ и $X_{фш}(t)$ будем считать независимыми, белыми и гауссовыми. Начальное распределение величины $\lambda(t_0) = \lambda_0$ также будем полагать гауссовым. Таким образом, выполняются все условия линейной фильтрации. Кроме того, будем считать источники шума белыми и представлять их в виде

$$X_{шн}(t) = \sqrt{2D_n} n_n(t), \quad X_{фш}(t) = \sqrt{2D_\phi} n_\phi(t).$$

Будем считать, что измерения производятся в дискретные моменты времени $t_i, i=1, 2, 3, \dots$ с постоянным шагом дискретизации $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Обозначим: $X(t_i) = X_i$, $\lambda(t_i) = \lambda_i$, $H(t_i) = H_i$, $u(t_i)\Delta t = U_i$, $1 - \alpha(t_i)\Delta t = \beta_i$. Вместо непрерывных источников шума $X_{шн}(t)$ и $X_{фш}(t)$ введем дискретные источники стандартного гауссова белого шума N_{ni} и $N_{\phi i}$:

$$X_{шн}(t) \rightarrow \sigma_{шн} N_{ni} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} X_{шн}(t) dt, \quad X_{фш}(t) \rightarrow \sigma_{фш} N_{\phi i} = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} X_{фш}(t) dt$$

Откуда следует, что

$$\sigma_{шн}^2 = \frac{2D_n}{\Delta t}, \quad \sigma_{фш}^2 = 2D_\phi \Delta t. \quad (5)$$

где $\sigma_{шн}$ и $\sigma_{фш}$ – среднеквадратические значения для дискретного шума наблюдения и дискретного формирующего шума, соответственно.

Вместо уравнений (3) -- (4), приходим к следующим уравнениям с дискретным временем:

$$X_i = H_i \lambda_i + \sigma_{шн} N_{ni} \quad (6)$$

$$\lambda_i = \beta_{i-1} \lambda_{i-1} + U_{i-1} + \sigma_{фш} N_{\phi i-1}. \quad (7)$$

Рассмотрим фильтр, оптимальный по критерию Байеса. Используя свойства гауссовых процессов можно получить соотношения, которым должны удовлетворять оценка y_i и ошибка оценки $\hat{\sigma}_{\lambda i}^2$:

$$y_i = \beta_{i-1} y_{i-1} + U_{i-1} + k_i \cdot (x_i - H_i (\beta_{i-1} y_{i-1} + U_{i-1})), \quad (8)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}} = \frac{1}{\beta^2_{i-1}\hat{\sigma}^2_{\lambda_{i-1}} + \sigma^2_{\text{фш}}} + \frac{H^2_i}{\sigma^2_{\text{шн}}}, \quad (9)$$

где $k_i = \frac{H_i \hat{\sigma}^2_{\lambda_i}}{\sigma^2_{\text{шн}}}$.

Уравнения (8)-(9) называются уравнениями оптимального фильтра Калмана. Уравнение (8) задает алгоритм получения оптимальной оценки, а уравнение (9) - эволюцию условной дисперсии сообщения Y_i (т.е. ошибки оценки). Так как в (9) не входит X_i , то условная дисперсия $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i}$ совпадает с безусловным значением среднего квадрата ошибки: $\hat{\sigma}^2_{\lambda_i} = \sigma^2_{\text{ош}} = \langle (\lambda_i - Y_i)^2 \rangle$. Т.е. это - ошибка оценки $y_i = \langle \lambda_i | x_0, x_1, \dots, x_i \rangle$, которая является характеристикой фильтра, не зависящей от наблюдаемых данных. Схема фильтра приведена на рис.1.

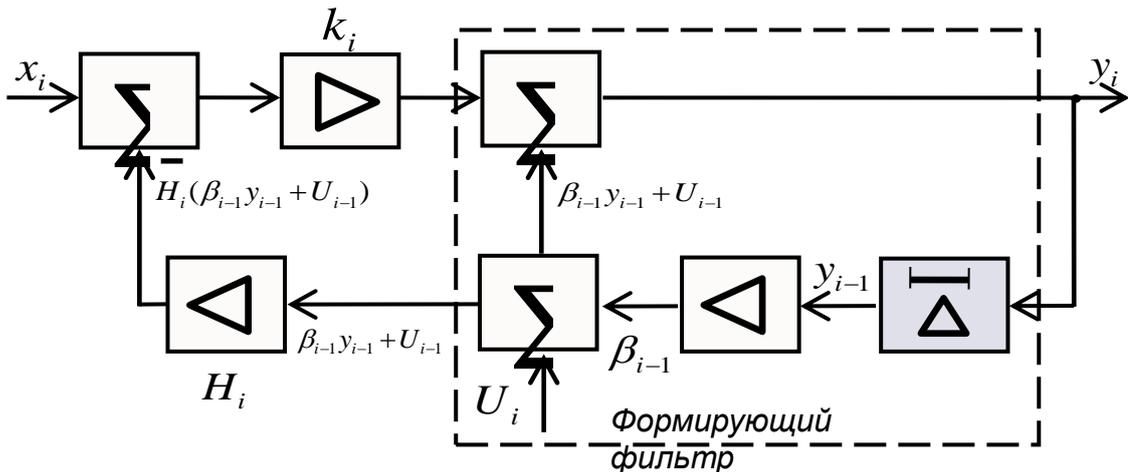


Рисунок 1 - Схема оптимального дискретного фильтра Калмана, задаваемого уравнением (8)

Фильтр Калмана (17) является нестационарным. Коэффициент k_i меняется во времени. сохраняется, даже если положить H, β и U константами. Это связано с процессом установления условной дисперсии.

В разделе 2 приводится общее описание разработанной в рамках ВКР лабораторной работы. Приводится постановка задачи лабораторной работы:

Задача лабораторной работы может быть сформулирована следующим образом:

- 1) Ознакомление с принципом работы рекурсивного фильтра Калмана, оценивающего состояние системы, используя ряд зашумленных данных.
- 2) Анализ работы фильтра, на простом примере фильтрации одномерного случайного сигнала, смешанного с гауссовым белым шумом.
- 3) Изучение влияния параметров системы на результаты вычисления.
- 4) Теоретический расчет зависимости ошибки от шага фильтрации.

В лабораторной работе планируется восстановить информационный сигнал $\lambda(t)$, задаваемый простым стохастическим уравнением первого порядка:

$$\frac{d\lambda}{dt} + \alpha\lambda = \sqrt{2D_\phi} n_\phi(t), \quad (10)$$

где α -- постоянный параметр, $n_\phi(t)$ – нормированный источник гауссова белого шума (формирующий шум), D_ϕ – интенсивность формирующего шума. Параметры α и D_ϕ в работе фиксируются неизменными. Измерения сигнала производятся с шагом Δt . Уравнение наблюдения имеет вид:

$$X_i = H\lambda_i + \sigma_{ин} N_{ni}, \quad (11)$$

где H – постоянная величина, N_{ni} – нормированный источник дискретного гауссова белого шума (шум наблюдения), $\sigma_{ин}$ – интенсивность (среднеквадратичное значение) шума наблюдения.

Предполагается следующий порядок выполнения лабораторной работы:

- 1) Ознакомиться с теоретическим материалом.
- 2) Выбрать значения параметров уравнения сообщения и интенсивность шума наблюдения и получить сигнал в виде массива данных. Пронаблюдать изменения исходного сигнала под действием шума.
- 3) Рассчитать оптимальные параметры фильтра. Для этого, используя уравнение ошибки (9), рассчитать зависимость ошибки от шага фильтрации и определить коэффициент $k_i = \frac{H_i \hat{\sigma}_{\lambda i}^2}{\sigma_{ин}^2}$ в уравнении оптимального фильтра (8).

4) Используя фильтр Калмана(8), получить оптимальную оценку информационного сообщения.

5) Пронаблюдать зависимость точности фильтрации от шага Δt , через который производятся измерения наблюдаемых данных.

4)Изменяя интенсивность шума наблюдения, определить влияние уровня шума на качество и скорость фильтрации.

В этом же разделе приводится общая характеристика программного обеспечения лабораторной работы.

Среда для разработки должна обладать многими факторами:

1)Простота. Это один из главных факторов, так как если студент не сможет разобраться в среде разработки, то ни о каком исследовании не может быть и речи.

2)Эффективность. Программная среда должна полностью отвечать заданным требованиям и давать полный простор для разработчика.

3)Оптимизация. Один из немаловажных факторов. Среда должна быть постоянно в актуальном состоянии или иметь возможность подключать необходимые для конкретной задачи библиотеки.

4)Мультиплатформенность/Гибкость.

Всем этим требованиям удовлетворяет среда Labview[13-18]. Кроме того, среда Labview позволяет имитировать работу с реальной измерительной радиотехнической аппаратурой.

Раздел 3 представляет практическую часть работы.

Главной задачей практической части была разработка и реализация лабораторной работы, направленной на исследование работы дискретного оптимального фильтра Калмана. Предполагалось, что информационный сигнал описывается уравнением (10), а уравнение наблюдения имеет вид (11). Будем также полагать, что коэффициент есть $H=1$. При этом, уравнение оптимального фильтра Калмана(8) принимает вид:

$$y_i = \beta y_{i-1} + k_i \cdot (x_i - \beta y_{i-1}), \quad (12)$$

где $k_i = \frac{\hat{\sigma}_{\lambda_i}^2}{\sigma_{шн}^2}$, $\hat{\sigma}_{\lambda_i}^2$ - средний квадрат ошибки оценки. Уравнение ошибки(18)

можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_{\lambda_i}^2} = \frac{1}{\beta^2 \hat{\sigma}_{\lambda_{i-1}}^2 + \sigma_{фи}^2} + \frac{1}{\sigma_{шн}^2}. \quad (13)$$

Для реализации лабораторной работы была разработана и создана в среде Labview виртуальная лабораторная установка, которая описана ниже.

В подразделе 3.1. приводится блок-схема виртуальной установки (рис.2) и дается краткая характеристика всех блоков.

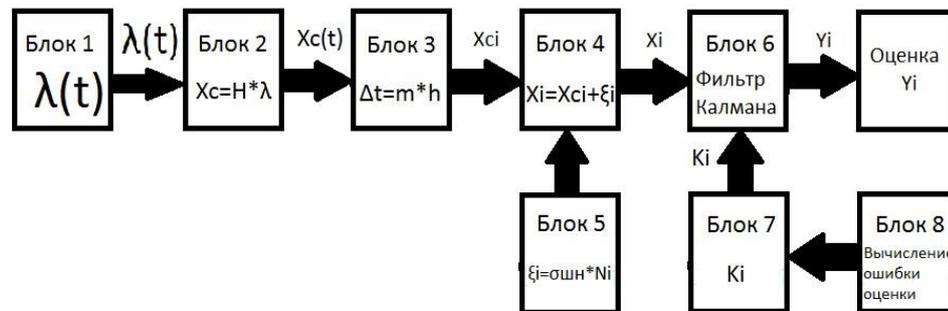


Рисунок 2 - Блок-схема виртуальной экспериментальной установки, созданной в среде Labview

Блок 1. Информационный сигнал. Блок, который создает информационный сигнал, который осуществляет интегрирование, в ходе которого мы задаем параметры: α , D_{ϕ} , h .

Блок 2. Полезный сигнал. $x_c = N$ В данном блоке интегрированный сигнал суммируется с аддитивной помехой. Происходит умножение на N так как в уравнении (11), мы используем как частный случай $N=1$ и мы можем его не учитывать. Таким образом получаем полезный сигнал, который зависит от λ .

Блок 3. Выборка. Полезный сигнал поступает на блок выборки, где выборка происходит с шагом Δt , где Δt - шаг измерения, h - шаг

интегрирования. Таким образом мы прореживаем полезный сигнал. И получаем сигнал x_i

Блок 4. Наблюдаемый сигнал. Здесь к нашему прореженному сигналу x_i мы добавляем шум: $x_i = x_i$

Блок 5. Шум наблюдения. Создание шума $\xi_i = \sigma_{\text{ш}}$ Можно также отметить, что студенты могут изменять интенсивность шума наблюдения в процессе выполнения работы.

Блок 6. Этот блок представляет собой сам фильтр Калмана. На вход блока 6 поступает наблюдаемый сигнал x_i наблюдаемый дискретный по времени с шагом сигнал. Также поступает коэффициент k_i . На выходе этого блока мы получаем оценку информационного сигнала y_i с определенным шагом по времени.

Блок 7. Этот блок на каждом шаге рассчитывает коэффициент k_i , который зависит от ошибки оценки: k_i

Блок 8. Вычисление ошибки оценки по формуле (13).

Далее, в **подразделе 3.2**, поэтапно разбираются все блоки виртуальной установки. Их устройство проиллюстрировано на рис.3-12.

В **подразделе 3.3**. приведены результаты контрольных измерений, демонстрирующих работу фильтра.

Мы предлагаем следующие фиксированные значения, для которых пронаблюдаем работу фильтра:

Начальное условие $x_0 = 1$

Параметр уравнения сообщения $\alpha = 1$

Шаг интегрирования уравнения сообщения $h = 0.001$

Кол-во итераций = 5000

Интенсивность шума наблюдения $\sigma_{\text{шн}} = 0.5$

Интенсивность формирующего шума $D_{\phi} = 0.1$.

После того как мы задали все значения мы получаем графики, по которым можно проводить анализ. Результаты приведены на рис.14 и рис.15. Видно, что сигнал на выходе фильтра сначала дает значения с ошибкой, которая с течением времени уменьшается до нуля. Изменяя шаг измерения в сторону уменьшения приблизительно до $h=0.0005$ можно заметить, что ошибка фильтра становится более длительной, и наоборот, при увеличении шага измерения до $h=0.005$ мы наблюдаем, что фильтр довольно-таки быстро выдает значения, приближенные к истинным.

В подразделе 3.4. приводятся результаты, иллюстрирующие работу фильтра Калмана. На рис. 16 представлены графики, построенные с помощью графической программы GNUPLOT по данным фильтрации, полученным с помощью виртуальной установки и занесенным в специальный файл выходных данных. Графики представляют значения исходного и отфильтрованного сигнала, можно пронаблюдать, что ошибка становится практически нулевой на значении приблизительно 2200

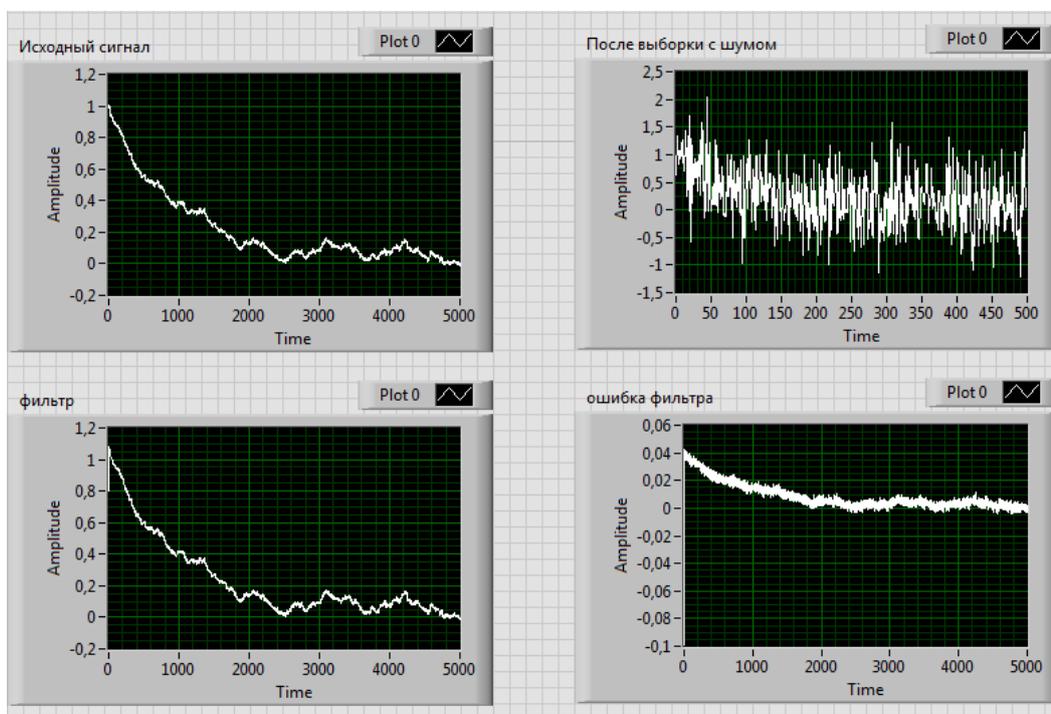


Рисунок 14–Демонстрация работы виртуального прибора в ходе эксперимента

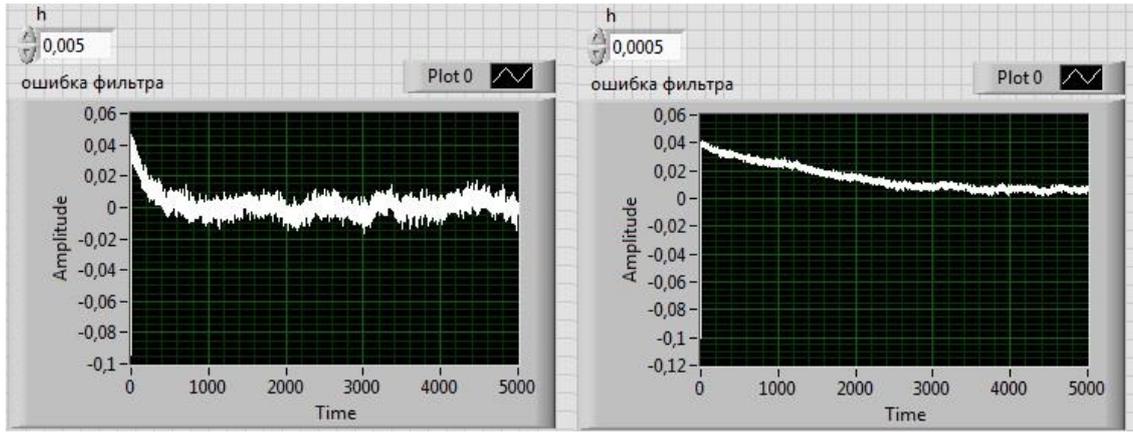


Рисунок 15 -Зависимость оценки ошибки от шага измерения

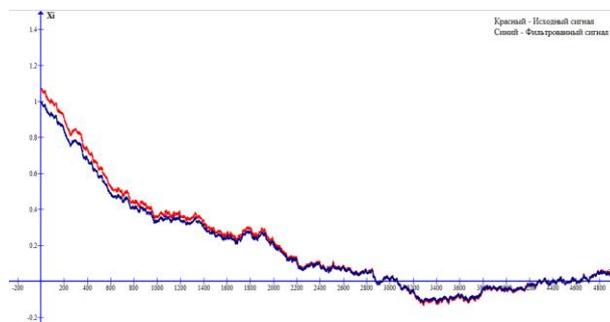


Рисунок 16 – Сравнение исходного и отфильтрованного сигнала

На рисунке 17 отображается ошибка оценки фильтра. Задачей фильтра является минимализация оценки ошибки для более точного и быстрого восстановления сигнала . Мы так же можем наблюдать, что ошибка начинает приближаться к нулю на значении так же 2200.

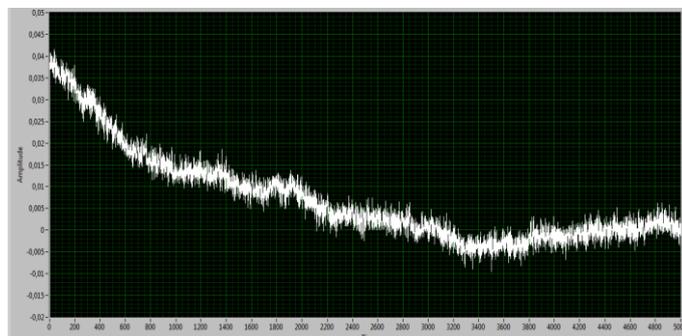


Рисунок 17 – Зависимость оценки ошибки от шага интегрирования

В **заключении** приводятся основные результаты работы.

В ходе проделанной работы были получены следующие результаты.

1. В среде Labview реализован оптимальный фильтр Калмана для заданного вида уравнения сообщения. Он осуществляет хорошее восстановление информационного сигнала для достаточно короткой реализации. При этом результат восстановления практически не зависит от шага выборки. Фильтр хорошо работает при различных интенсивностях шума наблюдения. Во всех рассмотренных случаях ошибка оценки быстро стремится к нулю.
2. Разработанная в среде Labview виртуальная установка удобна для изучения проблемы линейной фильтрации студентами. Ее предполагается использовать в практикуме по статистической радиофизике на кафедре радиофизики и нелинейной динамики СГУ. Также разработаны и протестированы задания для студентов по выполнению данной лабораторной работы.
3. Теоретическая часть дипломной работы и описание виртуальной установки могут служить основой для создания методического пособия для практикума.

В конце работы приводится **список используемых источников:**

1. В.И. Тихонов, В.Н. Харисов, Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. — М.: Радио и связь, 2004.
2. А.С. Котоусов, Оптимальная фильтрация сигнала и компенсация помех. Горячая Линия-Телеком. 2008
3. А.К. Розов, Нелинейная фильтрация сигналов. — М.: Политехника, 2002.
4. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов, Теория систем автоматического управления / 4-е изд. — СПб.: Профессия, 2003.
5. А.И. Егоров, Основы теории управления: учеб. пособие. — М.: Физматлит, 2007.
6. А.Н. Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование стационарных последовательностей // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1941, №5. С.3-14.
7. N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. — N.Y.: John Wiley, 1949.
8. Р.Л. Стратонович, Принципы адаптивного приема. — М.: Сов. Радио, 1973.

9. R.E. Kalman, A new approach to linear filtering and prediction problems // Journal of Basic Engineering. 1960. Vol.82 (SeriesD). P.35-45.
10. R.E. Kalman, R.S. Bucy, New results in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering. 1961. Vol.82. P. 905-108.
11. И.Н. Сеницын, Фильтры Кальмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.
12. Б.И. Шахтарин, Фильтры Винера и Калмана. – М.: Горячая линия -- Телеком, 2014.
13. National Instruments. LabVIEW Вводный курс. – 2003.
14. Р.Ш. Загидуллин, Labview в исследованиях и разработках. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005.
15. Дж. Тревис, Labview для всех. – М.: Прибокомплект, 2005.
16. Н. Кехтарнаваз, Н. Ким, Цифровая обработка сигналов на системном уровне с использованием LabVIEW. -- Додэка, 2007
17. В. К. Батоврин, LabVIEW: практикум по основам измерительных технологий.-- М.: ДМК-Пресс, 2005.
18. П. Блум, Labview. Стили программирования. – М.: ДМК, 2008.