

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**КОГЕРЕНТНЫЙ РЕЗОНАНС В ОСЦИЛЛЯТОРЕ ФИТЦХЬЮ-  
НАГУМО В БИСТАБИЛЬНОМ РЕЖИМЕ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4-го курса 421 группы

Направления 03.03.03. - Радиофизика

Физического факультета

Наливайко Петра Олеговича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ ВадивасоваТ.Е.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ АнищенкоВ.С.

Саратов 2016

## Характеристика работы

Работа посвящена изучению когерентного резонанса в осцилляторе ФитцХью-Нагумо в бистабильном режиме.

Цель выпускной квалификационной работы: методами численного моделирования исследовать статистические характеристики стохастических колебаний в осцилляторе ФитцХью-Нагумо в присутствии источника шума в режиме бистабильности и в режиме возбудимой динамики, провести сопоставление этих режимов, а также выявить влияние степени релаксационности удаленности от порога автогенерации на характеристики стохастических колебаний.

В работе было использовано 25 литературных источников.

## Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы, дается общее представление о роли шума в так называемых стохастических осцилляторах так же, о эффектах такие как стохастический резонанс, когерентный резонанс формулируется цель работы.

Важной проблемой в теории колебаний и статистической радиофизике является исследование влияния случайных воздействий (шума) на нелинейные колебательные системы. Шум присутствует во всех реальных природных системах и технике, и не может быть полностью устраним. Даже слабый шум может играть важную роль в поведении динамических систем, приводя к множеству разнообразных эффектов, таких как индуцированные шумом переходы. С понятием "шум" в быденном сознании ассоциируется термин "помеха", наличие которой может только ухудшить функционирование любой системы. Хорошо известны классические проблемы радиофизики, связанные с ограничением чувствительности усилителей и конечностью ширины спектральной линии генераторов, что обусловлено воздействием естественных

и технических шумов. Система особенно чувствительна к шуму, если она находится вблизи бифуркации и является структурно неустойчивой. Однако известны и другие примеры шумового воздействия, когда действие шума индуцирует новые упорядоченные режимы, приводит к появлению наиболее регулярных структур, то есть при определенных условиях, шум может увеличивать степень порядка в нелинейной системе. К таким типам поведения относятся эффекты стохастического резонанса и когерентного резонанса.

Эффект стохастического резонанса (СР) является одним из наиболее ярких примеров организующей роли шума в нелинейных системах. Эффект СР определяет группу явлений, при которых отклик нелинейной системы на слабый внешний сигнал заметно усиливается с ростом интенсивности шума в системе. Термин "стохастический резонанс" был введен авторами работы в 1981–1982 гг. на основе исследований модели бистабильного осциллятора, предложенной для описания периодичности в наступлении ледниковых периодов на Земле.

Другим примером организующей роли шума в нелинейных системах может служить явление когерентного резонанса (КР). Он заключается в существовании некоторой оптимальной интенсивности шума, при которой колебания системы становятся наиболее регулярными. Эффект КР характерен для широкого класса систем, называемых возбудимыми.

Особенно существенна роль шума в так называемых стохастических осцилляторах, представляющих собой активные нелинейные системы, которые, в силу преобладания диссипации энергии над ее подкачкой, не способны поддерживать незатухающие колебания без воздействия внешних сил. В присутствии случайных воздействий (шума) в таких системах возникают стохастические колебания, характеристики которых определяются как параметрами системы, так и свойствами шума. Обычно различают два типа стохастических осцилляторов: бистабильные стохастические осцилляторы и возбудимые стохастические осцилляторы. Бистабильные осцилляторы – это нелинейные системы с двумя устойчивыми состояниями. Добавление в них

шума приводит к случайным переключениям системы из одного состояния в другое. Для возбудимых систем характерна генерация импульсов при условии, когда сигнал внешнего воздействия превышает некий пороговый уровень, следовательно, такая система совершает стохастические колебания, представляющие собой случайную последовательность импульсов.

Существуют осцилляторы, в которых, в зависимости от значений параметров, может наблюдаться возбудимый режим с одним устойчивым равновесием, а может реализоваться бистабильный режим с двумя устойчивыми точками равновесия. Примером такой системы является осциллятор ФитцХью-Нагумо (ФХН). Обычно, осциллятор ФХН служит простым примером возбудимого поведения, который четко демонстрирует эффект КР. ФХН является простейшей моделью динамики нейрона и, в силу своей простоты, широко используется при моделировании динамики нейронных ансамблей, исследовании эффектов КР и стохастической синхронизации в распределенных системах и средах. Осциллятор ФитцХью-Нагумо легко воспроизводится в виде радиотехнической цепи и используется в физических экспериментах. Однако, его поведение в режиме бистабильности не было в достаточной степени исследовано и сопоставлено с поведением в возбудимом режиме. Важным является вопрос, как изменятся статистические характеристики стохастических колебаний в осцилляторе ФитцХью-Нагумо при изменении параметров таким образом, что возбудимый осциллятор становится бистабильным.

В разделе 1 дается краткие теоретические сведения о стохастических осцилляторах.

### **Бистабильные осцилляторы**

Бистабильные осцилляторы – это системы с двумя устойчивыми состояниями. В общем случае этим состояниям могут соответствовать два любых аттрактора (в том числе хаотических), со своими бассейнами притяжения. В простейшем и

наиболее изученном случае бистабильный осциллятор представляет собой систему с двумя устойчивыми точками равновесия.

### **Возбудимые осцилляторы**

Возбудимые осцилляторы – это системы с двумя состояниями, устойчивым состоянием покоя, метастабильным состоянием возбуждения и процессом восстановления от состояния возбуждения к состоянию покоя. В отсутствие воздействий система всё время находится в состоянии покоя. Слабое воздействие вызывает слабый линейный отклик системы (некоторый импульс малой амплитуды). В результате достаточно сильного воздействия система приходит в состояние возбуждения, из которого снова возвращается в состояние покоя.

В разделе 2 приводится описание осциллятора ФитцХью-Нагумо и его динамика, так же методы численного моделирования, используемые в работе. Осциллятор ФитцХью-Нагумо, был предложен в 1961 г. Р.А. ФитцХью, и независимо в 1962 г. Дж. Нагумо и др., как простой пример двумерной системы с возбудимым поведением и представляет собой упрощение известной модели нейрона Ходжкина-Хаксли. Модель ФХН описывает (качественно, а не количественно) отклик II-го типа нейронной мембраны на импульсы внешнего тока. Она может быть описана системой двух дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \alpha x^3 - y, \\ \dot{y} &= \gamma x - y + \beta + \sqrt{2D}n(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где две безразмерные переменные  $x$  и  $y$  соответствуют мембранному напряжению и переменной восстановления для нейрона, или, в терминологии физической химии и полупроводниковой физики, активатору и ингибитору, соответственно,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  – безразмерные параметры системы,  $n(t)$  – нормированный гауссов белый шум,  $D$  – интенсивность шума. Параметр  $\alpha$

характеризует релаксационность системы и обычно предполагается малым (что соответствует сильно релаксационному поведению осциллятора).

В работе для исследования системы (1) применялись методы компьютерного моделирования. Уравнения (1) интегрировались по схеме Рунге-Куты 4-го порядка с учетом источника гауссова белого шума. По данным интегрирования на достаточно длительном времени после периода установления строились графики колебаний динамических переменных и фазовые портреты, а также вычислялись различные характеристики поведения системы: спектральная плотность мощности колебаний  $W(\omega)$ , средняя частота переключений  $\omega_R$  (частота Райса) и нормированная девиация интервалов между переключениями  $R$ .

Спектральная плотность мощности колебаний  $W(\omega)$  рассчитывается для какой-либо динамической переменной с использованием программы быстрого преобразования Фурье и усреднения результатов преобразования, полученных для достаточно большого количества фрагментов колебаний на различных интервалах времени. Спектральная плотность мощности для удобства нормируется на максимальное значение и представляется в децибелах:

$$S(\omega) = 10 \lg \frac{W(\omega)}{W_{\max}}. \quad (2)$$

Частота Райса  $\omega_R$  рассчитывалась по формуле

$$\omega_R = \frac{2\pi}{\langle T_i \rangle}, \quad (3)$$

Для этого на достаточно большом времени интегрирования исследуемой системы создавался массив интервалов  $T_i$  между последовательными переходами переменной нулевого значения в одном направлении. Одновременно с использованием того же массива данных рассчитывалась нормированная девиация интервалов переключения:

$$R = \frac{\sqrt{\langle T_i^2 \rangle - \langle T_i \rangle^2}}{\langle T_i \rangle} \quad (4)$$

Величина  $R$  характеризует степень неупорядоченности колебаний. Чем более случайными являются переключения, тем больше значение  $R$ . Минимум  $R$  соответствует наибольшей степени упорядоченности колебаний во времени и может служить характеристикой когерентного резонанса.

**В разделе 3** представлена практическая часть работы. Были проведены численные исследования поведения системы (1) при  $\hat{\omega} = 1/3$  и двух значениях параметра  $\epsilon$ :  $\epsilon = 0.01$  и  $\epsilon = 0.2$ . Главным образом рассматривалось влияние шума на систему (1) в трех выбранных режимах, обозначенных номерами 1,2,3. Режимы 1 и 2 соответствуют бистабильному режиму (с двумя симметрично расположенными устойчивыми состояниями равновесия). При этом они отличаются степенью удаленности от порога генерации (красная сплошная линия). Режим 3 соответствует возбуждому режиму с одним устойчивым равновесием. Этот режим выбирался примерно на том же расстоянии от порога генерации, что и режим 1 в бистабильном случае.

Были построены зависимости частоты  $\omega_R$  от интенсивности шума  $D$ . Графики этих зависимостей для режимов 1,2,3 приведены на рисунке 1. На первый взгляд все полученные зависимости имеют один и тот же характер: частота переключений при малом шуме резко возрастает с ростом интенсивности  $D$ , а затем выходит на участок более медленного роста (рисунок 1 (а,б)). Однако если детально рассмотреть начальные участки зависимостей, можно увидеть, что они качественно различаются. Это хорошо заметно, если рассмотреть графики в логарифмическом масштабе по оси абсцисс (рисунок 1 (в,г)). При малом  $\epsilon$ , как в возбуждом режиме (красная кривая), так и в бистабильном режиме вблизи порога автогенерации (черная кривая) имеется участок роста, описываемый выпуклой функцией, т.е. вторая производная изменения частоты  $\omega_R$  с ростом интенсивности шума является отрицательной.

Однако в бистабильном режиме, удаленном от порога генерации (синяя кривая) участок с отрицательной второй производной почти не заметен. При сравнительно большом значении  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.2$ ). Только в возбужденном режиме начальный участок зависимости характеризуется отрицательной второй производной, в то время как в бистабильном режиме, как вдали от порога генерации, так и вблизи, вторая производная на начальном участке – отрицательна. Такой вид зависимости средней частоты переключений наблюдается в классической модели бистабильного осциллятора в бистабильном осцилляторе с квадратичным потенциалом, называемом осциллятором Дуффинга.

В бистабильном режиме был установлен эффект **когерентного резонанса (КР)**. Этот эффект хорошо известен и в осцилляторе ФитцХью-Нагумо (1) в возбужденном режиме. В то же время, в таких бистабильных системах, как осциллятор Дуффинга, эффект КР не наблюдается. Возникает вопрос, будет ли фиксироваться эффект КР в осцилляторе (1) в бистабильном режиме? Для оценки эффекта КР использовался коэффициент нормированной девиации характерных временных интервалов  $R$ . Полученные результаты представлены на рис.2. Эффект КР различим во всех представленных режимах. Он выражается в немонотонном характере зависимости нормированной девиации интервалов от интенсивности шума. Вблизи порога генерации, как в возбужденном режиме (красная кривая 3), так и в бистабильном случае (черная кривая 1), минимум величины  $R$  хорошо заметен. Минимальное значение  $R$  в обоих случаях близко и наблюдается почти при одном и том же шуме. Некоторое расхождение можно объяснить тем, что расстояние до порога генерации в этих режимах всё-же несколько отличается. В бистабильном режиме, удаленном от бифуркации Андронова-Хопфа (синяя кривая 2), значения величины  $R$  становятся больше (более нерегулярные колебания), а эффект КР выражен слабее. Всё вышесказанное справедливо как для малого значения параметра релаксационности ( $\epsilon = 0.01$ ), так и для большего значения ( $\epsilon = 0.2$ ). В целом



при  $\epsilon = 0.2$  значения  $R_{\text{во}}$  во всех трех режимах возрастают примерно вдвое по сравнению с соответствующими режимами при  $\epsilon = 0.01$ .

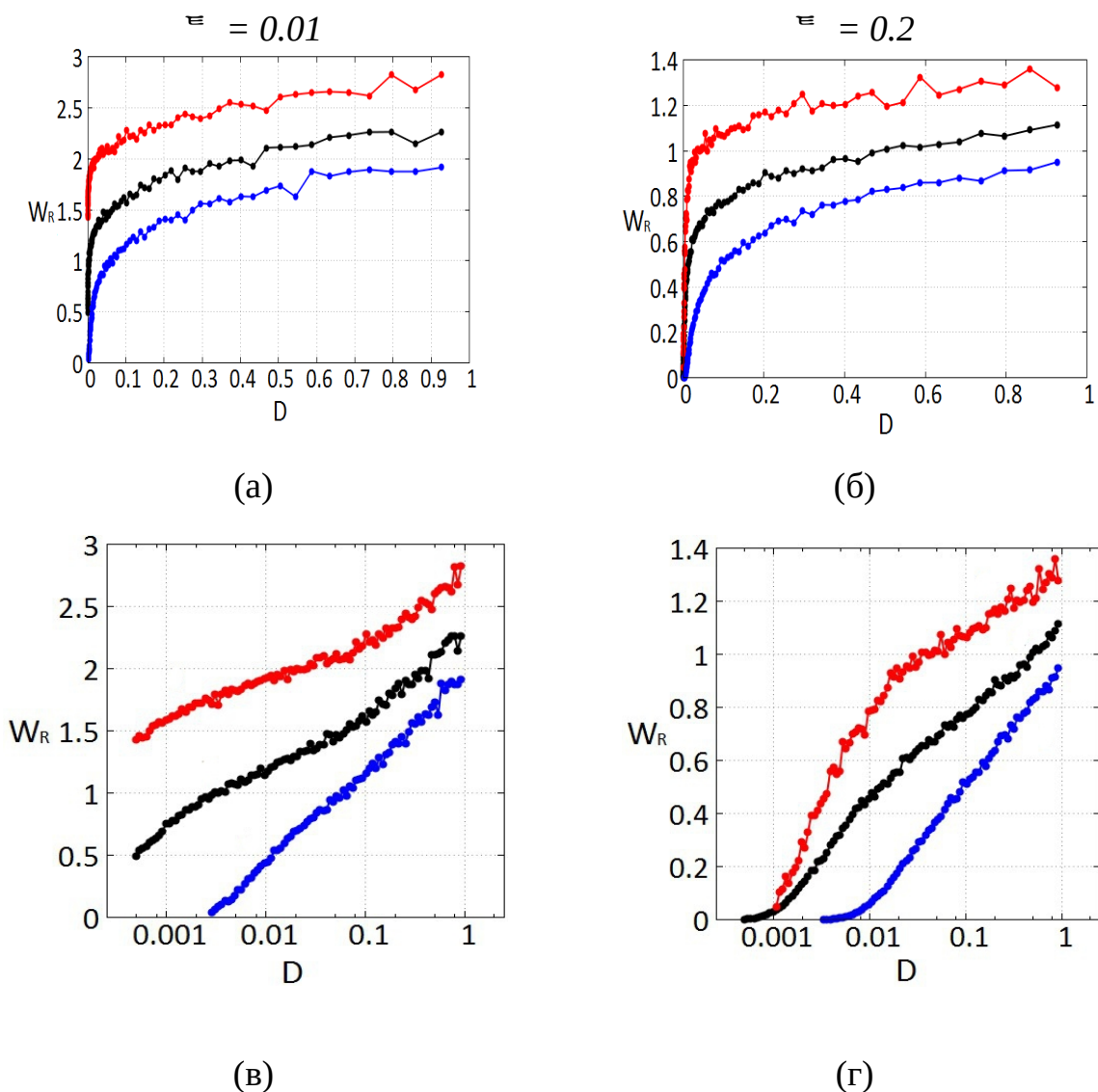


Рисунок 1 – Зависимости частоты Райса от интенсивности шума для трех исследуемых режимов при двух значениях параметра  $\epsilon$ : а – при  $\epsilon = 0.01$ ; б – при  $\epsilon = 0.2$ . Черным, синим и красным цветом изображены кривые, полученные в режимах 1, 2, 3, соответственно. При  $\epsilon = 0.01$  режим 1 соответствует параметрам  $\tilde{\sigma} = 0.6$ ,  $\tilde{\rho} = 0$ ; режим 2 --  $\tilde{\sigma} = 0.45$ ,  $\tilde{\rho} = 0$ ; режим 3 -  $\tilde{\sigma} = 0.82$ ,  $\tilde{\rho} = 0.2$ . При  $\epsilon = 0.2$  режим 1 --  $\tilde{\sigma} = 0.65$ ,  $\tilde{\rho} = 0$ ; режим 2 -  $\tilde{\sigma} = 0.5$ ,  $\tilde{\rho} = 0$ ; режим 3 -  $\tilde{\sigma} = 0.88$ ,  $\tilde{\rho} = 0.2$ . В нижней строке приведены те же зависимости в логарифмическом масштабе по оси абсцисс: в – при  $\epsilon = 0.01$ ; г – при  $\epsilon = 0.2$ .

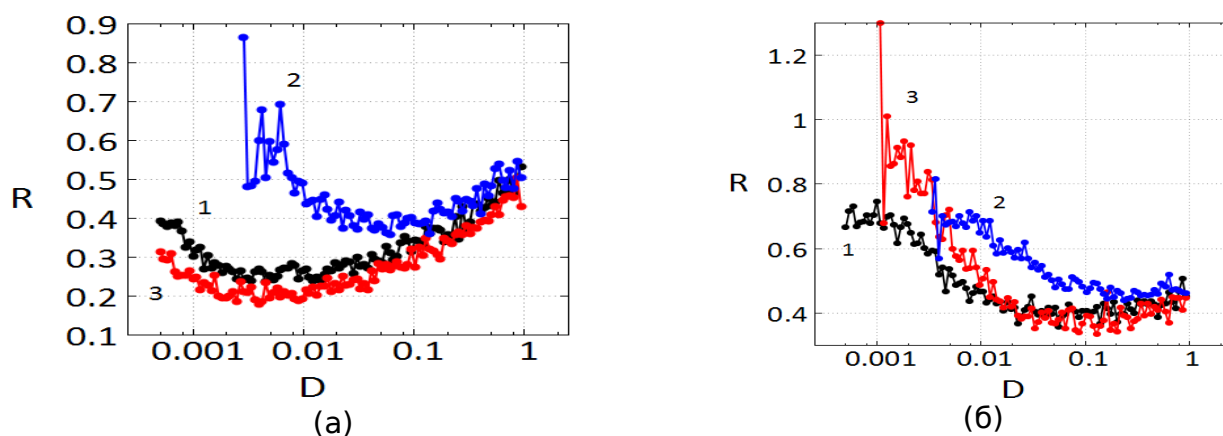


Рисунок 2–Зависимости нормированной девиации  $R$  от интенсивности шума для трех исследуемых режимов 1,2,3: а – при  $\epsilon = 0.01$ ; б – при  $\epsilon = 0.2$ .

Были рассчитаны спектры мощности стохастических колебаний в режимах 1-3 в условиях когерентного резонанса. В тех случаях, когда значение достаточно мало ( $R_{\text{мало}}$  в режимах 1 и 3 при  $\epsilon = 0.01$ ), в спектре можно выделить заметный максимум на некоторой ненулевой частоте  $\omega_{\text{max}} > 0$ , что свидетельствует о существовании стохастического предельного цикла. Для бистабильного режима 1 при  $\epsilon = 0.01$  спектральный максимум наблюдается на частоте  $\omega_{\text{max}} \approx 1.265$  (рис.3 верхний ряд слева). Частота Райса в этом режиме составляет  $\omega_R \approx 1.179$ , что совпадает с частотой спектрального максимума в пределах точности вычислений. Вдали от порога генерации (режим 2) даже при малом  $\epsilon = 0.01$  четкий спектральный максимум отсутствует, хотя по зависимости величины  $R$  от  $D$  можно диагностировать некоторый эффект КР.

Было исследовано, как зависит эффект когерентного резонанса от параметров  $\delta$  и  $\epsilon$ . Были построены зависимости минимального значения нормированной девиации интервалов  $R_{\text{min}}$  и оптимальной интенсивности шума  $D_{\text{min}}$ , при которой наблюдается минимум  $R$ , от параметра  $\delta$ , управляющего расстоянием от порога генерации в бистабильном режиме при  $\omega = 0$ . Вблизи от порога генерации система (1), несмотря на бистабильный режим (наличие двух устойчивых точек равновесия) проявляет свойства возбудимой системы, но с удалением от порога (уменьшением параметра  $\delta$ ) свойство возбудимости проявляется всё слабее. Рассматривалась также зависимости минимального

значения  $R_{min}$  и оптимального значения  $D_{min}$ , от параметра  $\epsilon$  при фиксированных значениях  $\delta = 0.65$ ,  $\omega = 0$  (в бистабильном режиме). При увеличении параметра  $\epsilon$  значение нормированной девиации  $R$  возрастает до максимального значения, и при дальнейшем увеличении  $\epsilon$  возрастание нормированной девиации не наблюдается.

В **заключении** приводятся основные результаты работы. Проведенные исследования осциллятора ФитцХью-Нагумо в бистабильном режиме показали, что, несмотря на бистабильную динамику (присутствие в фазовом пространстве системы двух устойчивых точек равновесия), осциллятор вблизи порога генерации в релаксационном режиме (при малом значении параметра  $\epsilon$ ) обладает чертами возбудимой системы. Эти черты проявляются в реакции на шумовое воздействие и подтверждаются следующими результатами, полученными в работе:

1. Зависимостью частоты Райса от интенсивности шума, характерной для возбудимого режима;
2. Наличием хорошо заметного эффекта когерентного резонанса;
3. Присутствием спектрального максимума на частоте, близкой к частоте Райса.

При увеличении расстояния до порога генерации, а также при увеличении параметра  $\epsilon$  и уходе из сильно релаксационного характера системы бистабильный стохастический осциллятор ФитцХью-Нагумо теряет черты возбудимой динамики. Его поведение под действием шума становится похоже на поведение классического двухамного осциллятора Крамерса.

В конце работы приводится **список используемых источников:**

- 1 В. Хорстхемке Р. Лефевр, Индуцированные шумом переходы. – М.: Мир, 1987.
- 2 Р.Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов.радио, 1961.
- 3 С.М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику Т. 1 Случайные процессы. -- М.: Наука, 1976.
- 4 А.Н. Малахов, Флуктуации в автоколебательных системах. – М.: Наука, 1968.
- 5 С.А. Ахманов, Статистическая радиофизика и оптика. Случайные колебания и волны в линейных системах. – Москва: Физматлит, 2010.

- 6 R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, The mechanism of stochastic resonance// J. Phys. A: Math. Gen. 1981. Vol. 14. P. L453– L457.
- 7 L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci, Stochastic resonance in bistable systems// Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 349--352.
- 8 В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гаер, Стохастический резонанс: индуцированный шумом порядок // УФН. 1999. Т.42(1). С. 7– 36.
- 9 A. Pikovsky, J. Kurths, Coherence resonance in a noisy driven excitable system//Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 775– 778.
- 10 B. Lindner, L. Schimansky-Geier, Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. 1999. Vol.60(6). P. 7270 – 7277.
- 11 R.A. FitzHugh, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. 1961. Vol.1. P.445.
- 12 J.S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon // Proceedings of the Institute of Radio Engineers. 1962. Vol.50. P.2061.
- 13 B. Lindner, J. García-Ojalvo, A. Neimand, L. Schimansky-Geier, Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. 2004. Vol.392. P. 321-424.
- 14 Ю.П. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский, Математическое моделирование в биофизике. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- 15 A. Longtin, Stochastic resonance in neuron models // J. Stat. Phys. 1993. Vol.70. P. 309 – 327.
- 16 J.F. Lindner, B.K. Meadows, W.L. Ditto, Array-enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization // Physical Review Letters. 1995. Vol. 75. P. 3–6.
- 17 A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, F. Moss, Noise-enhanced phase synchronization in excitable media // Physical Review Letters. 1999. Vol. 83. P. 4896–4899.
- 18 S. Astakhov, A. Feoktistov, V.S. Anishchenko, and J. Kurths. Synchronization of multi-frequency noise-induced oscillations. Chaos, Vol.21. 2011(4). P. 047513 (1-6).
- 19 В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, А.Б. Нейман, Г.И. Стрелкова, Л. Шиманский-Гаер Л., Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- 20 H.A. Kramers, Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica, 1940. Vol.7, P.284-304.
- 21 P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, Reaction Rate Theory: Fifty years after Kramers // Rev. Mod. Phys. 1990. Vol.62. P.251–342.
- 22 S.O. Rice, Mathematical analysis of random noise // Bell System Tech. J. 1944. Vol. 23. P. 282–332 (first part); 1945. Vol. 24, P. 46–156 (second part).
- 23 J. A. Freund, L. Schimansky-Geier, P. Hänggi, Frequency and phase synchronization in stochastic systems // Chaos. 2003. Vol.13, P. 225-238.
- 24 A. Hodgkin, A. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // J. Physiol. 1952. Vol.117. P.500–544.

- 25 Д. В. Шамшин Бифуркационный анализ осциллятора ФитцХью-Нагумо // выпускная квалификационная работа бакалавра, кафедры радиофизики и нелинейной динамики, СГУ 2015 г.
- Н.Н. Никитин, В.Д. Разевиг, Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журнал вычислит. математики и мат. Физики. 1978. Том. 18(1), С. 107-116.