Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Сеть осцилляторов Курамото

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 431 группы

направления 03.03.03 «Радиофизика»

факультета нелинейных процессов

Буганковой Виктории Сергеевны

Научный руководитель
профессор, д. ф. – м. н. ____________________________ А. А. Короновский

Зав. кафедрой
профессор, д. ф. – м. н. ____________________________ А. А. Короновский

Саратов 2016 г.

Введение. Синхронизация – одно из фундаментальных нелинейных явлений природы. Это явление можно рассматривать как метод самоорганизации взаимодействующих систем. Под синхронизацией обычно понимают установление некоторых соотношений в результате взаимодействия между основными характеристиками колебаний систем. Наиболее интересными являются системы, которые имеют большое количество элементов с неравномерно распределенными между собой связями. Наличие таких связей обуславливает большой ряд различных явлений коллективной динамики составных частей сети, включая образование подсетей, состоящих из сильно связанных элементов и, соответственно, возникновение режима синхронизации. Успешный подход к данной проблеме состоит из моделирования каждого члена сети в качестве фазового осциллятора. Во многих естественных ситуациях взаимодействуют более двух объектов. Поэтому, если два осциллятора способны к подстройке частоты, то можно ожидать такой способности и от большого количества осцилляторов. Такая система называется ансамблем взаимно связанных осцилляторов.

Как же объяснить, столь удивительное явление? Для изучения этого явления будет использована Модель Курамото, которая описывается элементарной алгебраической формой, такой как синус и поэтому считается простой для понимания и так же эффективна для объяснения синхронизации.

Целью данной работы является изучение сетей осцилляторов Курамото и их поведение при различных топологиях связи. В начале работы дается описание и методы построения трех топологий связи: малый мир, случайные сети, масштабно-инвариантная сеть. Затем во второй главе будет исследован нелинейный осциллятор под периодическим внешним воздействием и описано уравнение фазового осциллятора. После этого будет рассмотрена простая система с малым количеством осцилляторов, далее количество осцилляторов будет увеличено, для получения более точных результатов. Наконец, будет исследовано поведение системы при различных топологиях связи.

Основное содержание работы. В первой главе бакалаврской работы рассматриваются топологии сетей. Глава начинается с введения понятия сети и комплексной сети. Так же вводится понятие теории графов, так как эта теория является основой для точного математического описания комплексных сетей. Далее подробно описываются различные характеристики сети, такие как достижимости двух различных вершин графа, распределение степеней, длина кратчайшего пути, диаметр, промежуточность, кластеринг. После идет рассмотрение сетей трех топологий, это малый мир, случайная сеть, масштабно-инвариантная сеть, и так же приведены различные методы их построения.

Во второй главе исследуется простейшая модель автоколебательной системы с двумерным фазовым пространством, которая описывается уравнением Ван-дер-Поля, под периодическим внешним воздействием:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = b \sin \omega t \quad (1).$$

Решение уравнения ищем в вид квазигармонического колебания с медленно меняющейся амплитудой. С помощью метода Ван-дер-Поля получаем укороченное уравнение, которое изменяем, вводя перенормированные величины с целью уменьшения количества параметров в уравнении. Далее представляем комплексную амплитуду в виде $z = Re^{i\varphi}$, умножаем на $e^{i\varphi}$ и отделяя действительную и мнимую части получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{l} \dot{R} = R - R^3 - \varepsilon \cos \varphi \\ \dot{\varphi} = -\Delta + (\varepsilon/R) \sin \varphi \end{array} \quad (2) .$$

Амплитудное уравнение (2) в отсутствие внешнего сигнала $\varepsilon = 0$ имеет стационарное решение $R = 1$, чему в терминах исходной системы отвечает устойчивый предельный цикл.

Если амплитуда воздействия невелика, то система совершает движение в окрестности этого предельного цикла. Тогда, подставляя $R = 1$ во второе соотношение (2), приходим к замкнутому уравнению для единственной переменной – фазы колебаний системы по отношению к внешнему воздействию:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin \varphi \quad (3).$$

Полученное уравнение называется уравнением Адлера[10]. Стоит отметить, что данное уравнение позволяет рассмотреть систему, состоящую лишь из одного осциллятора.

Во втором разделе второй главы описывается модель линейного осциллятора (4), которая в теории колебаний выступает в качестве основной модели для описания движения маятника, грузика на пружине, а также эволюции во времени многих систем в различных науках.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0 x = 0 \quad (4).$$

Приводится описание поведения линейных систем и содержание принципа суперпозиции. Принцип суперпозиции играет фундаментальную роль во всей линейной теории колебаний и волн, именно благодаря ему часто удается построить решение линейной задачи в замкнутом виде.

Математическим аппаратом, адекватным задачам теории колебаний, является теория обыкновенных дифференциальных уравнений[13], а в случае линейных систем — теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения, в которые время не входит явным образом, соответствуют автономным системам. Их параметры и действующие на них внешние силы не зависят от времени. Гармонический осциллятор (4) — автономная система.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) вместо уравнения (2.10) получаем уравнение консервативного осциллятора

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \quad (5).$$

Решение уравнения (5) хорошо известно:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6).$$

Начальная фаза определяет сдвиг графика косинуса относительно нулевого момента времени: время t первого с начала отсчета максимального отклонения в сторону положительных x связано с начальной фазой формулой $\varphi_0 = -\omega_0 t$. Так как φ_0 всегда находится под аргументом синуса или косинуса, то она определена с точностью до произвольного, кратного 2π , слагаемого.

Третья глава начинается с описания понятие синхронизации. Это понятие является ключевым, так как в данной работе исследуется явление синхронизации ансамбля из некоторого количества осцилляторов.

Известно, что синхронность укоренена в человеческой жизни от процессов в клетках, до самых сложных задач, которые мы выполняем как группа лиц. Синхронизация в живых системах также известна уже несколько столетий. Например, большая популяция светлячков может абсолютно синхронно излучать вспышки света[15]. Синхронизация может возникнуть по причине естественных свойств самой системы, тогда мы имеем дело с взаимной синхронизацией. В иных случаях, требуется внести в систему дополнительных связей, тогда говорят о синхронизации внешней силой [16].

Как уже ранее говорилось, для исследования синхронизации удобнее моделирование каждого члена сети в качестве фазового осциллятора. Ансамбль из таких осцилляторов будет изучен с помощью модели Курамото. Модель Курамото – это система дифференциальных уравнений первого порядка, используемая для изучения систем фазовых осцилляторов, она представляет собой математическую модель, используемую для описания синхронизации. Более конкретно, это модель поведения большого набора связанных осцилляторов и она удобна по причине небольшой вычислительной сложности. В модели используется предположение, что существует слабая связь между осцилляторами, осцилляторы являются одинаковыми или почти одинаковыми, и что взаимодействия зависят синусоидально от разности фаз между каждой парой объектов. Данная модель описывается с помощью уравнения для фазы φ каждого из N осцилляторов:

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} K_{i,j}\, sin(\varphi_j - \varphi_i)\,,\ i = 1, \dots, N \quad (7),$$

где ω_i внутренняя частота i - того осциллятора, K – матрица связи, отображающая взаимное влияние взаимодействующих осцилляторов, N определяет количество осцилляторов в сети, ε – амплитуда взаимодействия.

Оригинальная модель Курамото представляет собой систему, где все осцилляторы равнозначно связаны между собой. На начальном этапе была использована именно такая модель. Матрица связи задавалась таким образом, что в ней присутствовали значения 0 (осцилляторы не связаны между собой) или 1 (осцилляторы связаны между собой). Оригинальная модель состоит из единиц и только по диагонали стоят нули. Параметр внутренней частоты ω_i бралось в пределах от 1 до 3, значение амплитуды воздействия ε изменялось от 0.01 до 6. Для изучения зависимости поведения системы от изменения параметров были построены графики на языке программирования Wolfram Mathematica.

Были выбраны три значения параметра амплитуды воздействия ε [0.1, 1, 5] при внутренней частоте $\omega = 2.99$ (Рис. 1-3). Как видно из рисунков, чем больше параметр ε, тем требуется меньшее количество времени для наступления синхронизации между осцилляторами, то есть параметр амплитуды воздействия выступает в качестве силы связи между осцилляторами.

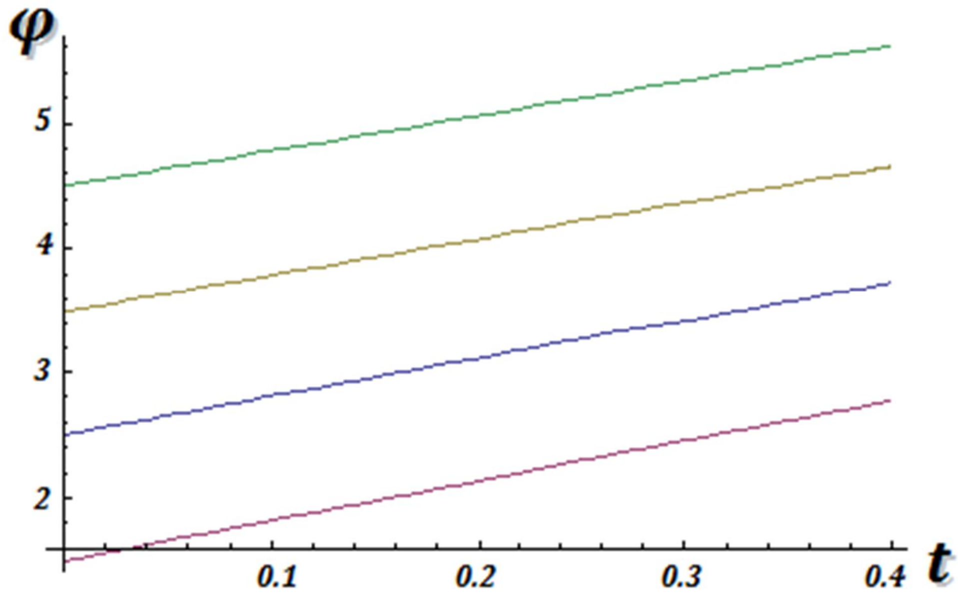

Рис.1: изменение фазы φ относительно времени t системы для параметра амплитуды воздействия ε =0,1.

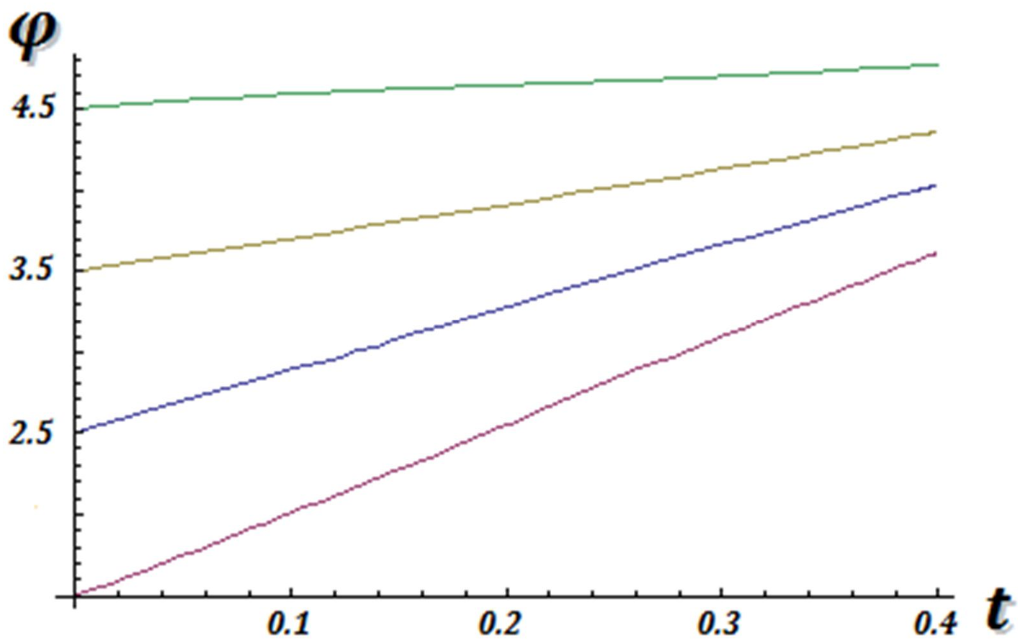

Рис. 2: изменение фазы φ относительно времени t системы для параметра амплитуды воздействия ε =1.

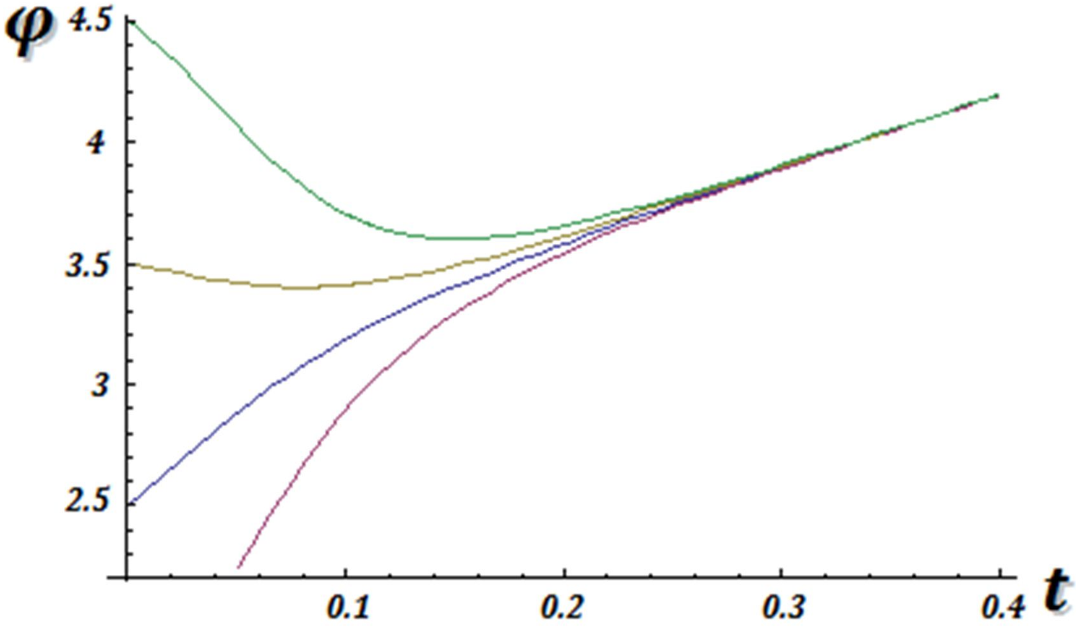

Рис. 3: изменение фазы φ относительно времени t системы для параметра амплитуды воздействия ε =5.

Также были получены результаты для системы осцилляторов при постоянном значении амплитуды воздействия $\varepsilon = 5$, где параметр частоты ω задавался следующим образом [1.1, 1.12, 1.13, 1.16, 1.18]. Данные представленные на Рис. 4.

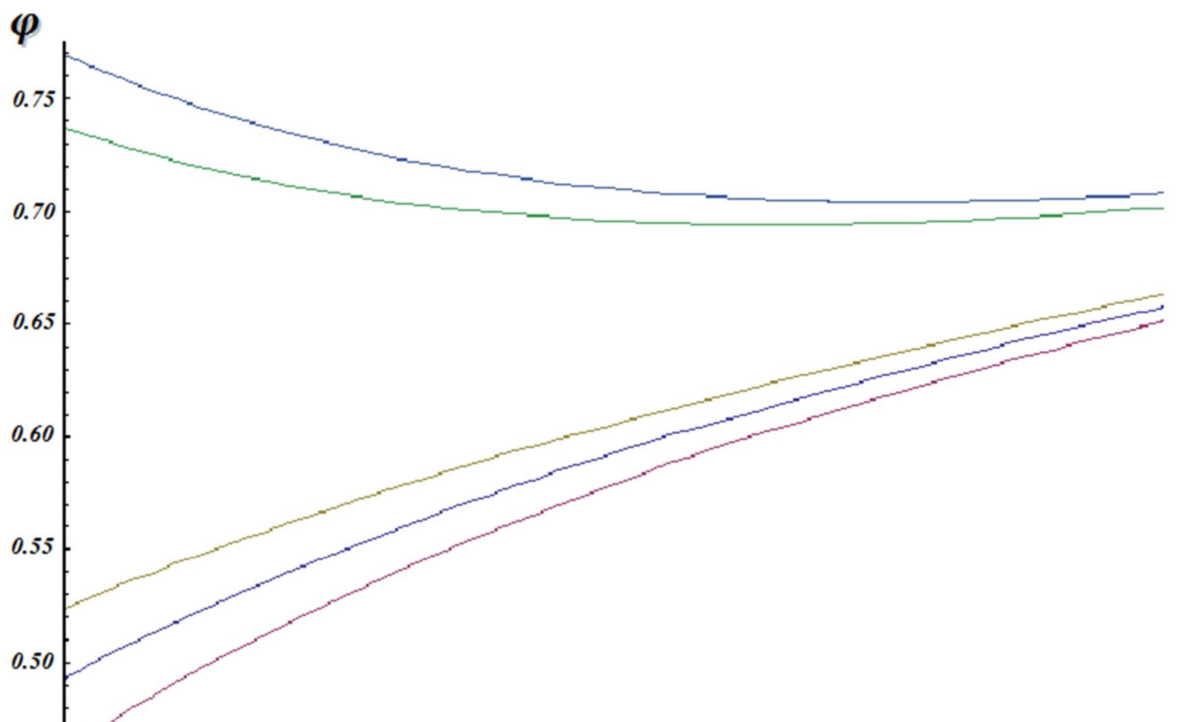

Рис. 4: изменение фазы φ относительно времени t системы для параметра амплитуды воздействия ε =5 при разных значениях внутренней частоты ω [1.1, 1.12, 1.13, 1.16, 1.18].

Затем были изучены различные топологии. Для этого были получены графики для различных распределений, соответствующих данным топологиям. Была задана матрица связи, для 10 осцилляторов, матрица задавалсь с помощью вероятностного распределения, которое соответствовало той или иной топологии. Первой была рассмотрена топология масштабно-инвариантной сети. Параметр амплитуды воздействия ε был задан равным 1, внутренння частота $\omega = 2.99$ (Рис. 5).

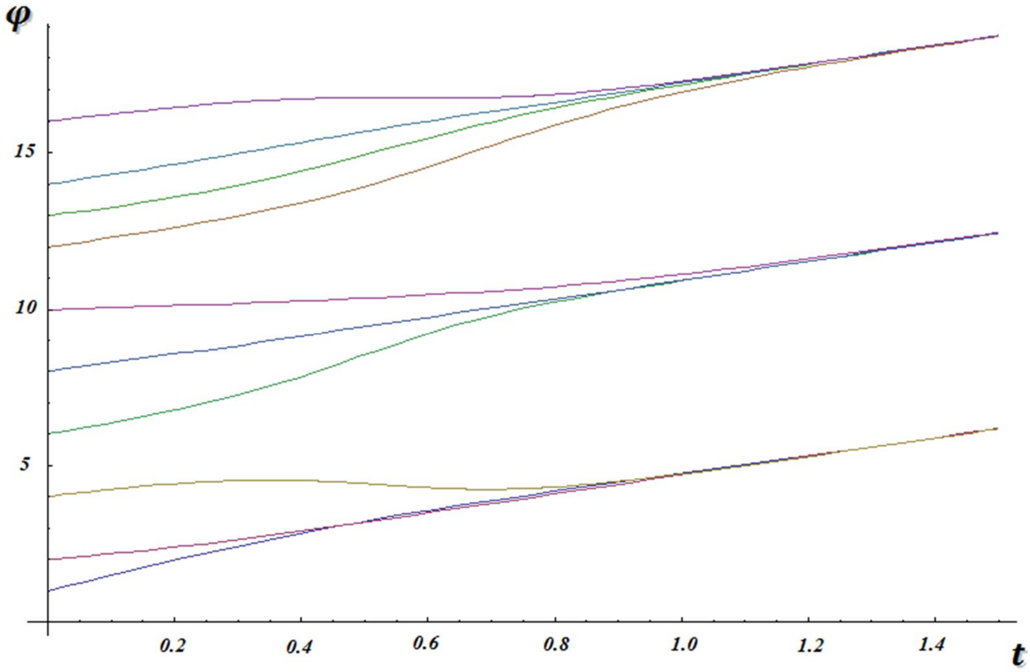

Рис. 5: изменение фазы φ относительно времени t системы для параметра амплитуды воздействия ε =1 в случае масштабно-ивнвариантной сети.

Таким же образом получена матрица смежности для топологии случайной сети. Параметры задавались такие же, как и для масштабно-инвариантной сети, а именно амплитуда воздействия ε =1, частота $\omega = 2.99$ (Рис. 6).

Из представленных рисунков 5 и 6 видно, что в рассматриваемом случае, случайной сети для наступления полной синхронизация всех осцилляторов требуется больше времени, чем для масштабно-инвариантной сети.

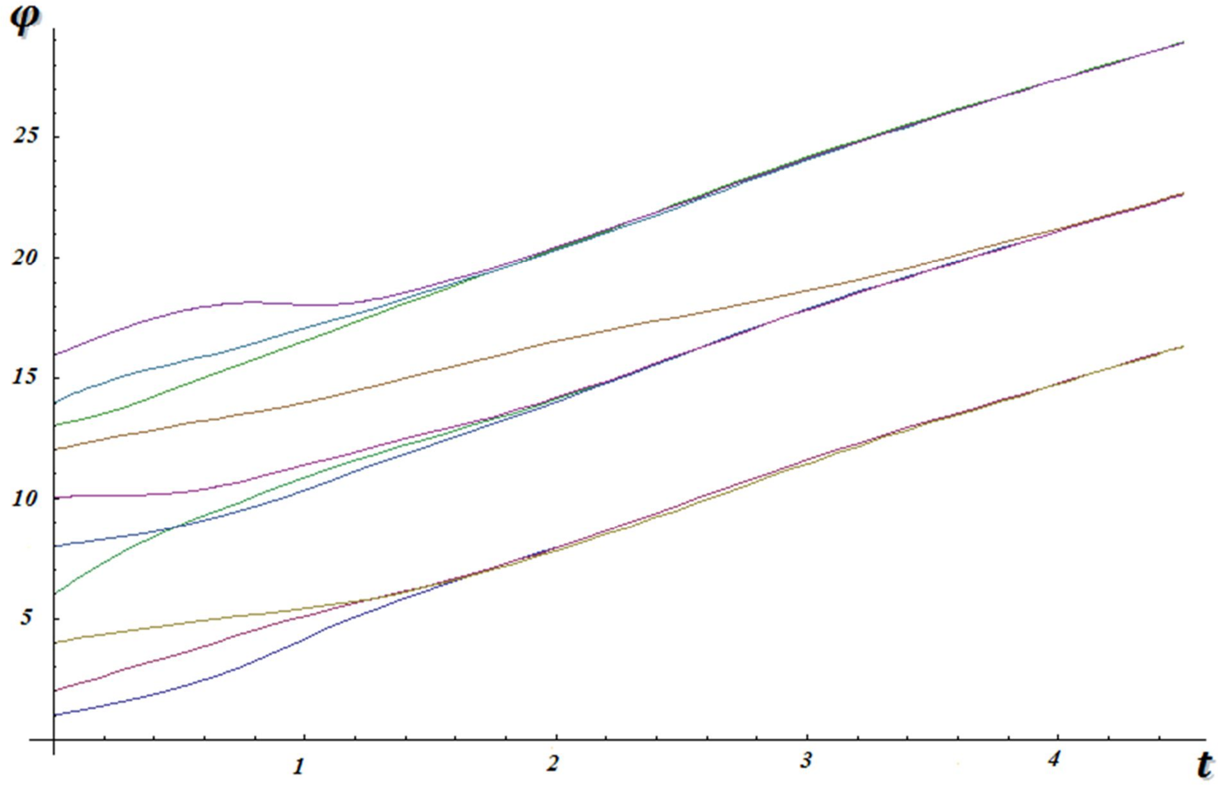

Рис. 6: изменение фазы φ относительно времени t системы для параметра амплитуды воздействия ε =1, случайная сеть.

Заключение

Синхронизация является развивающейся областью исследований и, вероятно, останется популярной в течение долгого времени, так как это явление привлекательно и легко наблюдаемо в мире. Для изучения этого явления модель Курамото имеет много преимуществ, она используется во многих областях из-за легкости обработки и простоты моделирования. Именно по этим причинам данная модель и была использована в данной работе. С помощью модели Курамото были получены графики синхронизации ансамбля связных осцилляторов с произвольно заданной матрицей смежности и рассмотрены различные топологии сети. В обоих случаях была выявлена важность параметра амплитуды связи ε, от которого зависело время наступления синхронизации между осцилляторами.

Так же хотелось бы отметить, что исследование поведения осцилляторов при их синхронизации, представляет собой некую модель, которую можно наложить на любую исследуемую сеть, будь это различные жизненные ритмы подобно дыханию или биение человеческого сердца, или же аплодисменты в большой аудитории. Именно поэтому исследование синхронизации в больших ансамблях – нейронных сетях представляет собой актуальную проблему, которая является основой построения мощных вычислительных сетей. Так же знания о синхронизации в данной области позволят получить более сложные системы управления, которые могут быть аналогичны мозгу. А исследование на системы внешнего воздействия считаются ключевыми в поисках различных методик по управлению и подавлению коллективной динамики элементов сети.

Список литературы

1. S. Boccaletti, V. Latorab, Y. Morenod, M. Chavez, D.-U. Hwang, Complex networks: Structure and dynamics. Physics Reports 424 (2006) 175.
2. D.J. Watts, S.H. Strogatz, Nature 393 (1998) 440.
3. P. Erdos, A. Renyi. On Random Graphs I. Publ. Math. Debrecen 6 (1959) 290.
4. B. Bollobas, Random Graphs, Academic Press, London, 1985.
5. D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
6. M. Molloy, B. Reed, Random Struct. Algorithm 6 (1995) 161.
7. M.E.J. Newman, SIAM Rev. 45 (2003) 167.
8. M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts, Phys. Rev. E 64 (2001) 26118.
9. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2002.
10. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений. ООО Издательский центр «Наука», 2012.
11. Мандельштам Л. И.. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
12. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.
14. Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А., Учебно-методическое пособие по курсу «Математическое моделирование». М.: Изд-во Российского университета дружбы народов, 2007.
15. Пиковский, А. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М. : Техносфера, 2003 .
16. А.Л.Фрадков. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003.