Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Исследование нелинейной динамики различных моделей экологических систем

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
факультета нелинейных процессов
Приходько Марины Анатольевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ____________________ О.И. Москаленко
подпись, дата

Зав. кафедрой физики открытых систем
д.ф.-м.н., профессор ____________________ А.А. Короновский
подпись, дата

Саратов 2016 год

Введение

В настоящее время задачи экологии имеют первостепенное значение. Важным этапом решения этих задач является разработка математических моделей экологических систем.

Одной из основных задач экологии на современном этапе является изучение структуры и функционирования природных систем, поиск общих закономерностей. Большое влияние на экологию оказала математика, способствующая становлению математической экологии, особенно такие её разделы, как теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости и теория оптимального управления.

Одной из важных проблем математической экологии является проблема устойчивости экосистем, управления этими системами. Управление может осуществляться с целью перевода системы из одного устойчивого состояния в другое, с целью её использования или восстановления.

Настоящая выпускная квалификационная работа посвящена рассмотрению некоторых принципиально различных моделей экологических систем, описывающих динамику численности популяций, начиная с самой простой из существующих – модели Мальтуса. В работе приводятся подробные описания различных моделей динамики экологической системы «хищник –жертва» по мере их усложнения и проводится сравнение их с точки зрения наибольшей близости результатов к реальным системам. Подробно исследуется динамика модифицированной модели, предложенной Вайдлихом, использующей в своей основе вероятностный подход, а также распределенной модели «хищник-жертва». Для всех рассмотренных моделей были построены временные реализацию и фазовые портреты, иллюстрирующие изменение численности хищников и жертв при различных значениях управляющих параметров, а для распределенной модели – еще и пространственно-временные диаграммы. Решение всех систем проводилось численно при помощи программного пакета Wolfram Mathematica.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав и заключения. В первой главе «Классические модели экологических систем» рассмотрены модели Мальтуса и Ферхюльста, а также модель Лотки-Вольтерра. Во второй главе «Модифицированные модели «хищник-жертва» исследованы модель Вайдлиха и распределенная модель «хищник-жертва». Результаты и выводы приведены в заключении.

Основное содержание работы

Модели Мальтуса и Ферхюльста

Одной из первых моделей динамики численности популяции является модель Мальтуса, предложенная в 1802 году:

$$\boldsymbol{dN/dt \; = \; rN} \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{dN/dt}$ - абсолютная скорость роста численности, $\boldsymbol{r}$ - биотический потенциал. Решением уравнения (1) является

$$\boldsymbol{N(t) = N0e^{rt},} \qquad (2)$$

то есть имеет место экспоненциальный рост/спад численности популяции.

Как правило, численность популяции зависит не только от рождаемости и смертности, но и от ограниченности пищевых и других ресурсов. Эти факторы учтены в модели Ферхюльста, описывающей динамику численности популяции при ограниченных ресурсах:

$$\boldsymbol{dN/dt = Nr(1 - N/k)} \qquad (3)$$

где **r** - удельная скорость роста численности, $\boldsymbol{N}$ - численность популяции, $\boldsymbol{k}$ – емкость среды. Это уравнение отличается от уравнения экспоненциального роста (уравнения Мальтуса) слагаемым $-\boldsymbol{r/kN^2}$**,** которое как раз и отражает ограниченность ресурсов.

Решение уравнения (3) графически отображается в виде S-образной кривой, называемой *логистической кривой*, а рост численности, соответствующий уравнению (3) - *логистическим*. Исследуя кривую, можно сказать, что максимальная скорость роста численность равна $\boldsymbol{k/2}$. В некоторый момент численность стабилизируется и остается постоянной величиной.

Популяции, существующие в условиях ограниченных ресурсов, часто хорошо подчиняются правилам логистического роста. Например, когда овцы были завезены в Тасманию, рост их стада описывался логистической кривой.

Но правила логистического роста применимы не ко всем случаям. Например, у размножающихся половым путем видов при слишком малой численности мала вероятность встреч особей разного пола и размножение может вообще прекратиться.

Модель Лотки-Вольтерра

Одной из первых работ в области математической экологии была работа А.Д. Лотки (1880 - 1949), который первый описал взаимодействие различных популяций, связанных отношениями хищник - жертва. Большой вклад в исследование модели хищник-жертва внесли В. Вольтерра (1860 - 1940) и В.А. Костицин (1883-1963). В настоящее время уравнения, описывающие взаимодействие популяций, называются уравнениями Лотки-Вольтерра.

Уравнения Лотки - Вольтерра описывают динамику средних величин - численности популяции. В настоящее время на их основе построены более общие модели взаимодействия популяций, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями, исследуются управляемые модели хищник – жертва.

Модель Лотки-Вольтерра представляет собой систему двух дифференциальных уравнений первого порядка, описывающую борьбу за существование двух популяций, одна из которых является для другой пищевым ресурсом:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= N_1(\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2), \\ \frac{dN_2}{dt} &= -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1) \end{aligned} \qquad (4)$$

Здесь N_1 и N_2 – численности популяций жертвы и хищника, соответственно; ε_1 – скорость размножения жертвы в отсутствии хищника, ε_2 – естественная смертность хищника, γ_1 и γ_2 – коэффициенты, соответствующие потребности в пище для каждого из двух видов. Система (4) имеет 2 стационарных состояния: 1) N_1=N_2=0; 2)N_1=ε_2/γ_2, N_2=ε_1/γ_1, первое из которых характеризует полное истребление жертв и вымирание хищников, а второе – стационарный режим сосуществования хищников и жертв с некоторыми ненулевыми численностями.

Исследование характера устойчивости положений равновесия показывает, что точка (0,0) является седлом, а точка (ε_2/γ_2, ε_1/γ_1) – центром. То есть, по крайней мере, в окрестности этой точки существуют замкнутые траектории.

Для подтверждения аналитически полученных результатов проведено численное исследование модели (4) при помощи программного пакета Wolfram Mathematica. Значения управляющих параметров выбраны следующими: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, $\gamma_1 = \gamma_2 =1$. Начальные условия для простоты заданы равными $N_{10} = N_{20} = 0.1$. Показано, что при вышеуказанных значениях управляющих параметров существует две особые точки: седло – в начале координат и центр в точке (0.5, 0.5), что согласуется с результатами аналитических расчетов.

Модель Вайдлиха

Модель Лотки-Вольтерра, рассмотренная выше, не обладает свойством структурной устойчивости, поскольку малые изменения описывающих модель параметров и функций, существенно влияют на решения уравнений. Структурной устойчивостью обладает модификация этой модели, предложенная в [1], что связано, прежде всего, с доступностью соответствующих средств для миграции в модели, приводящих к сложной картине с большим разнообразием различных случаев решения.

Исследуемая модель основана на следующем допущении. Существуют две среды обитания: открытая область и «убежище». Хищники могут поймать жертву только тогда, когда та находится в открытой области, в то время как жертве доступны две области: открытая и убежище. Динамика численностей хищников и жертв описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{d\tau} = -\upsilon\{x\exp(-u) - y\exp(u) + x(1-z)\}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \upsilon\{x\exp(-u) - y\exp(u)\} + \frac{y_0 - y}{y_0}y \tag{5}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -a(1-x)z$$

где x – численность жертв в открытой области, y – число жертв в убежище, z – численность хищников, $u = u(x,y,z) = \delta + \alpha(x-y) - \beta z$, где δ - параметр предпочтения (характеризует стремление жертв из убежища в открытую область, где лучше корм), α – параметр скопления для жертв, β – параметр страха жертв относительно хищников, v – параметр приспособляемости (характеризует скорость перемещения жертв из открытой области в убежище), a – параметр, характеризующий вымирание хищников, y_0 – емкость убежища.

В рамках бакалаврской работы проанализирована динамика системы (5) при различных значениях параметра υ. Если υ=0, отсутствует миграция жертв из открытой области в убежище. В данном случае слагаемое, содержащее экспоненты, исчезает, а модель становится классической моделью Вольтерра-Лотки (первое и третье уравнение). При этом, динамика численности жертв в убежище будет подчиняться уравнению Ферхюльста.

При υ=1 динамика системы существенно зависит от выбора остальных управляющих параметров. В частности, при фиксированных значениях управляющих параметров $y_0 = 1$, $a = 2$, $\delta = 1$, $\beta = 1$ и изменении α наблюдаются различные режимы, не характерные для случая υ=0. Например, при α=0 имеют место затухающие колебания, приближающиеся к устойчивому положению равновесия в точке $p_1(1, 1, 1)$. При α=0.5 и неизменных значений всех остальных управляющих параметров имеет место критическое замедление «колебательного подхода» к точке $p_1(1, 1, 1)$, которая становится неустойчивой при данном значении α. По всей видимости, это значение параметра является бифуркационным (в данной точке происходит бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой устойчивый фокус теряет свою устойчивость и в его окрестности появляется предельный цикл). При дальнейшем увеличении α колебания становятся сильно нелинейными, например, при α=1.5 имеют место не зависящие от начальных условий периодические колебания и устойчивый предельный цикл. Точка $p_1(1, 1, 1)$ в данном случае по-прежнему является неустойчивой.

На основе проведенного рассмотрения сделан вывод о том, что непрекращающийся поток жертв из убежища в открытую среду обитания приводит к стабилизации численностей как хищников, так и жертв (в обеих средах обитания), что невозможно в классической модели Вольтерра-Лотки.

Распределенная модель «хищник-жертва»

Следующим усложнением классической модели Вольтерра-Лотки, рассмотренным в бакалаврской работе, является рассмотрение так называемой распределенной модели «хищник-жертва» [2], описывающей пространственно-временную динамику водного сообщества («зоопланктон-фитопланктон»). Известно, что в данном случае поведение системы описывается с помощью системы уравнений типа «реакция-диффузия»:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= D\Delta u + f(u,v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D\Delta v + g(u,v), \end{aligned} \tag{6}$$

где $u(\mathbf{r},t)$ и $v(\mathbf{r},t)$ – плотности жертвы и хищника, соответственно, $\mathbf{r}$ – пространственный вектор, t – время, D – коэффициент диффузии, Δ – оператор Лапласа, f(u,v) и g(u,v) – нелинейные функции, вид которых определяется локальными биологическими процессами внутри рассматриваемого сообщества. Выбор одинаковых коэффициентов диффузии для хищников и жертв связан с тем, что процессы перемешивания в планктоновых сообществах обусловлены, в первую очередь, турбулентностью морской среды, являющейся одинаковой для хищников и жертв.

В работе исследована динамика системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \mathrm{u} + u(1-u) - \frac{u}{u+h} v \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + \mathrm{K}\frac{u}{u+h} v - mv \end{cases} \tag{7}$$

в одномерном случае при следующих значениях управляющих параметров: h = 0.3, K = 2, r = 0.4, $m = rK$. В этом случае оператор Лапласа заменяется на первую производную по координате (то есть $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$), в остальном система уравнений (7) останется неизменной. Система (7) дополнена начальными и граничными условиями:

$$u(x,0) = b_1(x),\ v(x,0) = b_2(x),$$
$$u(0,t) = b_1(0),\ u(5000,t) = b_1(5000), \tag{8}$$
$$v(0,t) = b_2(0),\ v(5000,t) = b_2(5000),$$

где $b_1(x) = \frac{rh}{1-r}$, $b_2(x) = (1-b_1(x))(h+b_1(x)) + \varepsilon x + \delta$, где $\varepsilon = 10^{-6}$, $\delta = 1.5\cdot10^{-3}$. Решение системы (7)-(8) осуществлялось также при помощи Wolfram Mathematica. Была исследована пространственно-временная динамика системы при выбранных значениях управляющих параметров и построен фазовый портрет системы в фиксированной точке пространства взаимодействия (x = 480). Показано, что поведение системы носит колебательный характер, при этом пространственно-временная диаграмма демонстрирует пятнистую структуру, соответствующую резкому увеличению/уменьшению численности хищников и жертв. Такое поведение имеет место в различных точках пространства взаимодействия и сохраняется при изменении управляющих параметров взаимодействующих систем.

Заключение

В настоящей выпускной квалификационной работе проведен обзор литературы, посвященной рассмотрению различных экологических моделей, начиная от простейших моделей Мальтуса и Ферхюльста вплоть до распределенной модели «хищник-жертва». При помощи программного пакета Wolfram Mathematica проведено численное моделирование нескольких моделей экологических систем (модели Мальтуса, Ферхюльста, Вольтерра-Лотки, Вайдлиха, распределенная модель «хищник-жертва») и проведено сравнение между ними. Установлено, что последние из рассмотренных моделей (модель Вайдлиха и распределенная модель) имеют несомненные достоинства по сравнению с остальными в отношении точности описания исследуемой системы и приближения модели к реальности. В подобных системах присутствует диссипация, отсутствующая в классической модели Вольтерра-Лотки, что приводит к появлению новых режимов, отсутствующих в классических аналогах.

Список используемой литературы

1. W. Weidlich, G. Haag «Conceps and Models of a Quantitave Sociology. The Dynamics of Integracting Populations» Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1983г.;
2. А.Б. Медвинский, С.В. Петровский, И.А. Тихонова, Д.А. Тихонов, Б. Л. Ли, Э. Вентурино, Х. Мальхё, Г.Р. Иваницкий. Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы. Успехи физических наук, 172(1) (2002) 31-66.
3. Д.И. Трубецков. Колебания и волны для гуманитариев. Изд. государственного учебно-научного центра «Колледж» 1997г.;

4. В.Д. Горяченко. Элементы теории колебаний, учеб. пособие. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 2001г.;
5. А.Д. Базыкин. «Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003г.;
6. Дж. Мари. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. Пер. с англ. -М.: Мир, 1983г.