Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Исследование синхронизации в сети фазовых осцилляторов со случайной топологией межэлементных связей

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
факультета нелинейных процессов
Пугачёва Ивана Михайловича

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ____________________ О.И. Москаленко
подпись, дата

Зав. кафедрой физики открытых систем
д.ф.-м.н., профессор ____________________ А.А. Короновский
подпись, дата

Саратов 2016 год

Введение

Исследование процессов, происходящих в сложных сетях, представляется в настоящее время одной из актуальных задач нелинейной динамики. Интерес к подобным системам обусловлен, прежде всего, наличием большого числа объектов в природе и технике, которые можно описать с помощью сетевых моделей. Энергетические сети, железнодорожные сети, сети авиаперевозок, метро, всемирная сеть Internet, социальные сети, сети соавторства, компьютерные сети – вот далеко неполный список объектов, к которым может быть применено понятие сети. Сложные системы, обладающие сетевой структурой, имеют важное практическое и научное значение. Кроме вышеперечисленных объектов можно упомянуть ячейки (био)-химических реакций, действующие по сетевому принципу; социальные системы, вершинами которых являются носители определенных интересов и идей, а ребра отвечают связям между ними; всемирную паутину World Wide Web, представляющую виртуальную сеть гипертекстовых и иных документов, объединенных направленными гиперсвязями; Интернет, представляющий сеть связанных компьютеров. К приведенным примерам можно добавить нейронные, транспортные и распределительные сети, а также сети метаболизма, питания, цитирования литературы и т.д. Хотя эти примеры далеко не исчерпывают всего многообразия сложных сетей, из их перечисления легко видеть, почему в последнее время настолько возрос интерес к изучению таких сетей.

Целью настоящей бакалаврской работы является исследование синхронизации в сети фазовых осцилляторов со случайной топологией межэлементных связей. В главе 1 «Понятие сложной сети, основные характеристики сложных сетей» введено понятие сети и построены случайные сети с помощью матрицы смежности для сетей с разным количеством элементов. Глава 2 «Распределение степеней узлов для случайной сети и его аппроксимация» посвящена подробному изучению одной из базовых характеристик сети - распределения степеней узлов для рассматриваемых сетевых моделей. В этой главе произведен расчет распределения степеней узлов для случайной сети и проведена его аппроксимация распределениями Гаусса, Пуассона, а также биномиальным распределением. В главе 3 «Синхронизация в случайных сетях: сеть фазовых осцилляторов Курамото» производится исследование синхронизации в сетях со случайной топологией межэлементных связей, производится расчет параметра порядка для таких сетей при различных значениях числа их элементов, определяется порог возникновения синхронизации в исследуемой сети. В качестве объекта исследования выбрана сеть фазовых осцилляторов Курамото.

Основное содержание работы

Традиционно под сетью понимается совокупность объектов, объединенных при помощи связей, причем каждый объект должен обладать определенными свойствами и содержать конкретную информацию. Математическим образом сети является граф. Он не содержит никакой информации об элементах сети, а просто передает ее структуру. Считается, что любая система, предполагающая наличие дискретных состояний или наличие узлов и переходов между ними, может быть описана графом. Соединения между узлами графа называются ребрами.

Первым исследователем графов был Леонард Эйлер (1707 – 1783). В 50-х гг. прошлого века выдающийся вклад в теорию графов внес Альфред Реньи, который ввел принципиально важное понятие классического случайного графа. К концу 1990-х гг. был накоплен большой фактический материал о различных сетевых структурах, и основные усилия сосредоточились на количественном описании этих систем.

Сложные сети — это существующие в природе сети, обладающие нетривиальными топологическими свойствами. Большинство объектов природы и общества имеют бинарные связи, которые можно представить в виде сети, где каждый объект это точка, а его связь с другим объектом это линия или дуга.

Сеть – это, например, группа компьютеров, соединенных друг с другом каналом связи. Канал обеспечивает обмен данными внутри сети. Сеть может состоять из двух-трех компьютеров, а может объединять несколько тысяч ПК. Физически обмен данными между компьютерами может осуществляться по специальному кабелю, телефонной линии, волоконно-оптическому кабелю или по радиоканалу.

Для расчета характеристик сети используются такие параметры, как: число узлов, число ребер, геодезическое расстояние между узлами, среднее расстояние от одного узла к другим, плотность — отношение количества ребер в сети к возможному максимальному количеству ребер при данном количестве узлов, количество симметричных, транзитивных и циклических триад, диаметр сети наибольшее геодезическое расстояние в сети и т. д. Вычисление таких характеристик сводится к анализу структуры сети, которую можно задать при помощи матрицы смежности.

Матрица смежности графа G с конечным числом вершин n (пронумерованных числами от 1 до n) — это квадратная матрица A размера n х n, в которой значение элемента a_{ij} равно 1, если существует связь из i-й вершины графа в j-ю вершину и равна 0 в противном случае.

Иногда, особенно в случае неориентированного графа, петля (ребро из i-й вершины в саму себя) считается за два ребра, то есть значение диагонального элемента a_{ii} в этом случае равно удвоенному числу петель вокруг i-й вершины.

Матрица смежности простого графа (не содержащего петель и кратных ребер) является бинарной матрицей и содержит нули на главной диагонали.

Кроме того, важную роль играет визуализация самой сети, то есть графическая передача ее структуры. Для визуализации сети использовалась программа pajek, позволяющая анализировать большие сети с тысячами вершин. Ее привлекательными свойствами являются серьезные средства статистических инструментов (регрессии, нормализация, другие возможности статистической работы с данными), возможности преобразования данных, поддержка разных форматов графических и текстовых файлов.

В настоящей работе рассматривались случайные сети. Реализован алгоритм создания случайной сети. В качестве модели сети выбрана матрица, в которой появление/отсутствие связи определялось наперед заданной вероятностью появления связи: случайным образом задавалось число, если это число превышало некоторую константу, например, 0.5, то связь задавалась, если меньше то нет. По диагонали матрицы были 0, это значит, что элементы сами с собой не связаны.

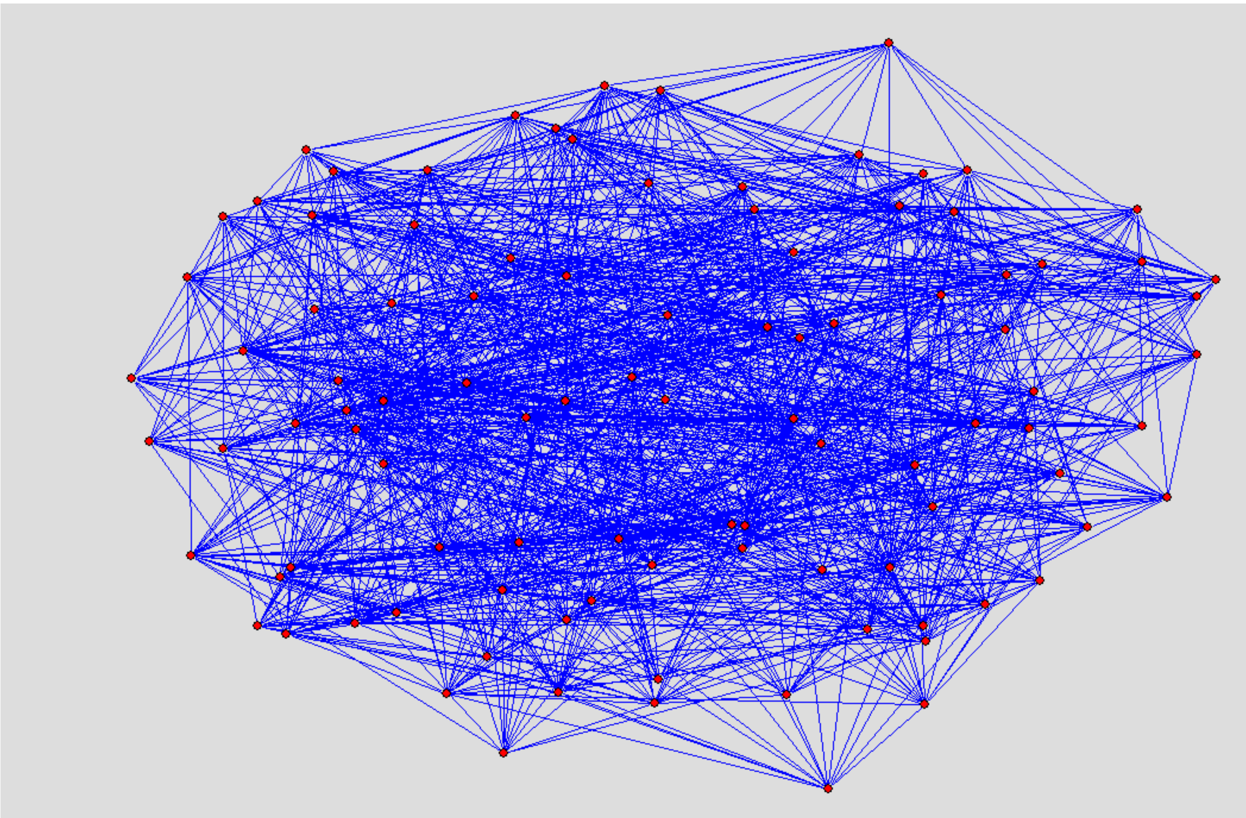

Рисунок 1 – Структура случайной сети из 100 элементов

Для сети из 10 элементов была задана вероятность появления связи, равная 0.5. Получена матрица смежности для исследуемой сети и ее графическое представление, полученное при помощи программы pajek. Аналогичные результаты получены для сетей из 100, 200 и 300 элементов (см., например, рисунок 1, где приведена сеть из 100 элементов, построенная при помощи программы pajek).

Важной характеристикой сети является функция распределения степеней узлов $P(k)$, которая определяется как вероятность того, что узел i имеет степень $k_i = k$. Сети, характеризующиеся разными $P(k)$, демонстрируют весьма разное поведение. Наиболее распространенным типом поведения является пуассоновское распределение степеней узлов, характерное для случайных сетей. В бакалаврской работе изучены особенности распределений степеней узлов для таких сетей.

Распределение Пуассона — это вероятностное распределение дискретного типа, моделирующее случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

$$p(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

Распределение Пуассона является частным случаем **биномиального распределения**, под которым понимают дискретное распределение вероятностей **одной** случайной величины X, принимающей целочисленные значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Данное распределение характеризуется двумя параметрами: целым числом $n > 0$, называемым числом испытаний, и вещественным числом p, $0 \le p \le 1$, называемом вероятностью успеха в одном испытании.

Нормальное распределение, также называемое **распределением Гаусса** (гауссовским, гауссовым распределением) - распределение вероятностей, которое в одномерном случае задаётся функцией плотности вероятности, совпадающей с функцией Гаусса: где параметр μ —

математическое ожидание (среднее значение), а параметр σ — среднеквадратическое отклонение (σ^2 —дисперсия) распределения.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

В работе произведен расчет распределения степеней узлов для случайной сети, состоящей из $N = 10\,000$ элементов. Для построения такой сети был реализован алгоритм, основанный на задании матрицы смежности, содержащей нули и единицы (см. выше). При этом, все диагональные элементы матрицы были выбраны равными нулю (элементы сами с собой не связаны), а вероятность появления связи между остальными элементами определялась параметром p. На рисунках 2-3 приведены распределения степеней узлов для случайной сети с различными вероятностями появления связи: $p = 0.5$ (рисунок 2) и $p = 0.005$ (рисунок 3).

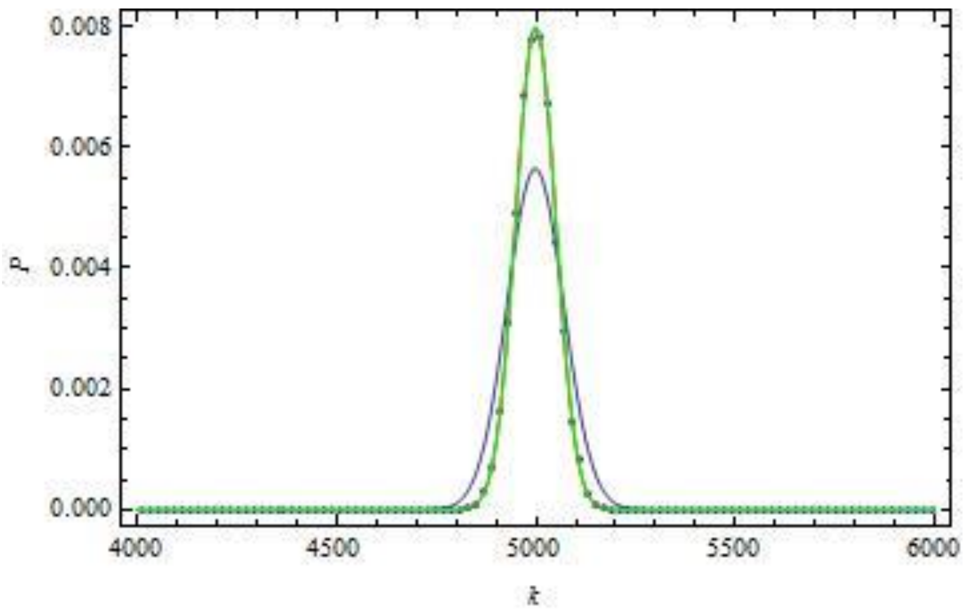

Рисунок 2 – Численно полученное распределение степеней узлов для случайной сети из $N = 10\,000$ элементов с вероятностью появления связи $p = 0.5$ (точки) и его аппроксимации распределением Пуассона (синяя линия), распределением Гаусса (красная линия) и биномиальным распределением (зеленая линия)

Красный график соответствует распределению Гаусса, синий соответствует распределению Пуассона, зеленый - биномиальному распределению. Точками показаны результаты численного расчета распределения степеней узлов. Видно, что в первом случае распределение степеней узлов хорошо аппроксимируется только биномиальным распределением и распределением Гаусса, в то время как во втором случае распределение Пуассона также является хорошей аппроксимацией распределения степеней узлов.

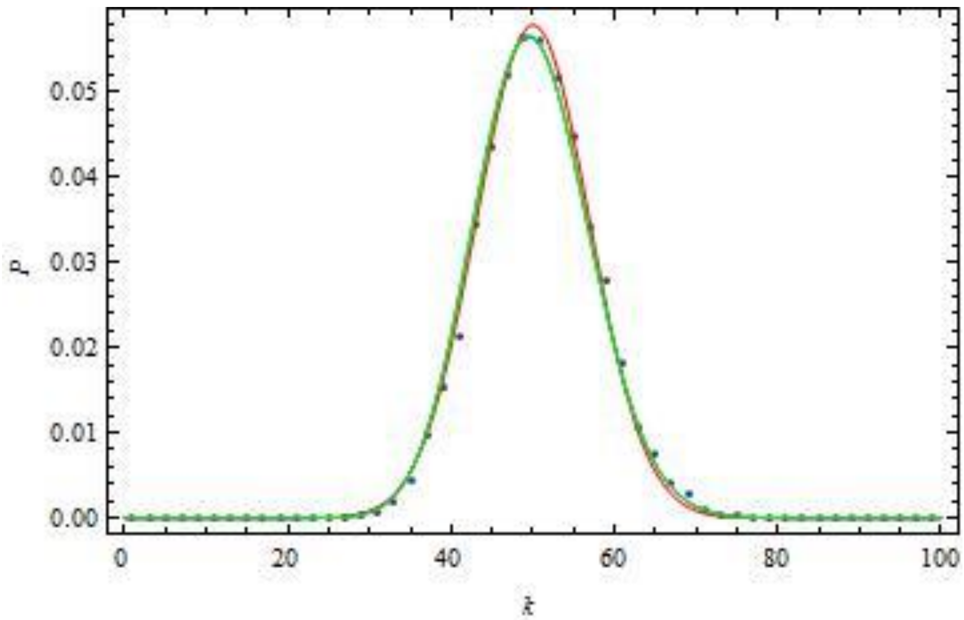

Рисунок 3 – Численно полученное распределение степеней узлов для случайной сети из $N = 10\,000$ элементов с вероятностью появления связи $p = 0.005$ (точки) и его аппроксимации распределением Пуассона (синяя линия), распределением Гаусса (красная линия) и биномиальным распределением (зеленая линия)

В бакалаврской работе исследовано также установление синхронизации в сети фазовых осцилляторов Курамото. В общем виде модель Курамото состоит из ансамбля связанных осцилляторов с фазами, с собственными частотами распределенными с некоторой плотностью вероятности, динамика которых определяется уравнениями:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{kj} \sin\left(\varphi_j - \varphi_k\right), \quad k = 1 \ldots N,$$

где ε_{kj} - матрица связи между осцилляторами. Синусоидальная функция связи здесь выбрана потому, что это самая простая 2π-периодическая функция. Распределение частот $g(\ \omega\ )$ предполагается симметричной относительно некоторого максимума $\overline{\omega}$, т.е. $g(\overline{\omega} -\ \omega) = g(\overline{\omega} +\ \omega)$.Сила связи между каждой парой осцилляторов выбирается пропорциональной N^{-1}, для того, чтобы в термодинамическом пределе $N \to \infty$, сила связи оставалась независимой от размера ансамбля. Таким образом, каждый осциллятор стремится колебаться независимо, но связь между ними стремится синхронизовать их так, чтобы все осцилляторы колебались с одинаковой частотой. Следует отметить, что связь стремится синхронизовать систему в фазе только в том случае, когда $\varepsilon > 0$, т.е. если связь положительна. В противном случае, когда $\varepsilon < 0$, связь будет синхронизовать систему в противофазе. В дальнейшем мы будем называть эти случаи синхронизацией и десинхронизацией соответственно. Для качественного анализа системы, удобно рассматривать модель, где все осцилляторы вместе производят некоторое среднее поле, которое само воздействует на каждый осциллятор через обратную связь. Роль обратной связи здесь играет параметр ε. Случай $\varepsilon > 0$ соответствует положительной обратной связи, которая стремится синхронизовать систему, а случай когда $\varepsilon < 0$ соответствует отрицательной обратной связи, которая стремится десинхронизовать систему.

Для характеристики степени синхронизации используется параметр

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j(t)}$$

характеризующий амплитуду среднего поля или параметр порядка, где Θ - фаза среднего поля. Здесь параметр порядка r играет роль показателя когерентности осцилляторов.

Для численного моделирования модель Курамото переписана в следующем виде:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{i=1}^{N} A_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \ldots, N,$$

где λ – параметр связи, ω_i – собственная частота осциллятора i [обычно распределяются в соответствии с некоторой функцией $g(\omega)$, которая в данной работы выбрана равномерной], и Aij – элементы матрицы смежности A, определяющей топологию сложной сети. В данной работе выбрана случайная топология межэлементных связей сети (см. выше).

Проведено численное решение сети Курамото из 100, 200 и 300 элементов с заданной топологией межэлементных связей. Был рассчитан параметр порядка для сетей из различного числа элементов. На рисунке 4 представлены зависимости параметра порядка r от силы связи λ для всех рассмотренных сетей. Для каждой из рассмотренных сетей зависимость параметра порядка от параметра связи усреднялась по десяти зависимостям, рассчитанным при различных начальных условиях, что позволило уменьшить флуктуации в области относительно слабых значений параметра связи и максимально приблизить значение r в этой области к нулю.

Параметр r в данном случае играет роль показателя когерентности осцилляторов. Если фазы всех осцилляторов в ансамбле одинаковы, что соответствует полной синхронизации, то из рисунка видно, что r=1. Если же фазы всех осцилляторов равномерно распределены в интервале, что соответствует отсутствию синхронизации, то мы имеем r=0. В общем случае, для произвольного распределения фаз осцилляторов имеем $0<r<1$, что свидетельствует о наличии ограниченного числа осцилляторов, синхронизированных друг с другом (кластерная синхронизация).

Из рисунка видно, что зависимости параметра порядка для сетей из малого числа элементов (100-300) слабо отличаются друг от друга, при этом, переход к полной синхронизации (выход зависимости на уровень насыщения) происходит примерно при одном и том же значении параметра связи.

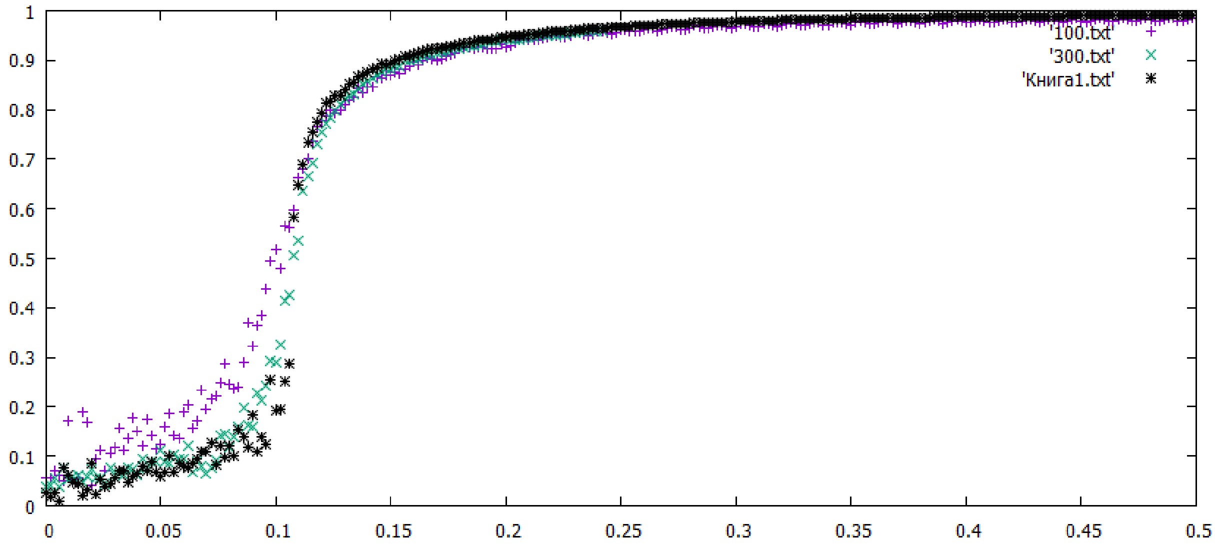

Рисунок 4 – Графики зависимости параметра порядка от параметра связи, иллюстрирующие установление синхронизации в сети фазовых осцилляторов Курамото при различных значениях числа элементов в сети: $N = 100$ – фиолетовая кривая, $N = 200$ – черная кривая, $N = 300$ – зеленая кривая

Заключение

В настоящей выпускной квалификационной работе построены случайные сети с различным числом элементов. Для визуализации сетей использовалась программа pajek. Численно получены распределения степеней узлов, полученные результаты сопоставлены с теоретическими закономерностями. Показано, что при малых значениях вероятности появления связи распределение степеней узлов для случайной сети может быть аппроксимировано как распределением Пуассона, так и биномиальным и гауссовым распределениями. При повышении вероятности появления связи численно полученное распределение начинает отклонятся от пуассоновского.

Проведено численное моделирование сети фазовых осцилляторов Курамото со случайной топологией межэлементных связей, построены графики зависимости параметра порядка от параметра связи для сетей из 100-300 элементов. Показано, что в рассмотренных случаях количество элементов слабо влияет на порог установления синхронизации в сложных сетях, что может быть обусловлено малым числом элементов, входящих в ансамбль.

Список литературы

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno V., Chavez M., Hwang D. U. Complex networks: Structure and dynamics // Physics Reports. 2006. Vol. 424. P. 175–308.
2. Barabasi A., Albert R. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. 2002. Vol. 74. P. 47–97.
3. Ландэ Д.В., Снарский А.А., Безсуднов И.В. Интернетика: Навигация в сложных сетях: модели и алгоритмы. - М.: Либроком (Editorial URSS), 2009. - 264 с.
4. Короновский А.А., Косицын А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Численное моделирование переходных процессов в эволюционирующих по генетическим алгоритмам сетях. Научно-технический вестник СпбГУ ИТМО. 2010. Т. 65, 1. С. 40-45.