

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Влияние слабой диссипации на динамику моделей,
демонстрирующих ускорение Ферми-Улама**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 214 группы
направления 03.04.01 Прикладная математика и физика факультета
нелинейных процессов

Аржанухина Кирилла Валерьевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н

А.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики

д.ф.-м.н., профессор

Н.М. Рыскин

Саратов 2016 г.

Введение

Впервые механизм ускорения частиц вследствие их столкновения с движущимися массивными рассеивателями был предложен Э. Ферми для объяснения происхождения космических частиц высоких энергий.[1] Идея состояла в том, что заряженные частицы при столкновениях с беспорядочно движущимися магнитными облаками в межзвездном пространстве должны в среднем ускоряться. Рассматривая облако как тело с большой массой, нетрудно понять причину ускорения. Если скорости облаков, с которыми сталкивается частица, распределены случайно, то можно сказать, что число облаков, движущихся в одном направлении, равно числу облаков, движущихся в обратном направлении. Поэтому частица будет преимущественно сталкиваться с теми из них, которым она движется навстречу. Отсюда следует, что частица чаще будет приобретать энергию, чем отдавать ее. Так возникает эффективное ускорение, называемое ускорением Ферми. Для изучения ускорения Ферми были предложены и разработаны различные модели, такие как модель Ферми–Улама, бильярдные модели и другие [2,3,4]. Системы бильярдного типа служат полезными моделями в акустике, оптике и в других областях. Кроме того, вопросы, возникающие при исследовании бильярдных моделей, тесно связаны с эргодической гипотезой Больцмана, и поэтому такие системы привлекают большой интерес [5,6,7].

Бильярдные модели проявляют широкий спектр разных типов динамики — от регулярной динамики до ярко выраженного хаотического поведения. Регулярная динамика характерна для плоских бильярдных систем с гладкой выпуклой наружу границей. С другой стороны, известен достаточно широкий класс бильярдных систем, которые могут демонстрировать свойство неравномерной гиперболичности. При некоторых дополнительных условиях в таких системах существуют устойчивые и неустойчивые многообразия почти всюду и, следовательно, они естественным образом обобщают (равномерно гиперболические) системы Аносова. Эти модели в той или иной степени прояснили причину ускорения.[8]

В связи с проблемой ускорения Ферми, физически более естественным будет анализ бильярдных систем, границы которых возмущаются по некоторому закону.

К чему приведут осцилляции границ бильярда? Дело в том, что в таком бильярде частица испытывает как встречные, так и сопутствующие столкновения с границей. В первом случае отражение от границы происходит, когда частица и граница движутся навстречу друг другу. Во втором случае столкновения происходят, когда частица и граница движутся в одном направлении. При встречных столкновениях частица "нагревается", т.е. ее скорость возрастает. Сопутствующие столкновения, наоборот, ведут к "остыванию" частицы, и она замедляется [9,10]. Учет возмущения границы является естественным обобщением бильярдных моделей. Такие модели играют важную роль в теории динамических систем. Бильярды являются полезными моделями в акустике, оптике, физике плазмы, астрофизике. Модели бильярдных систем так же были использованы для объяснения ряда экспериментальных результатов, полученных в атомной физике. Модели бильярдных систем могут быть поставлены в соответствие многим динамическим задачам. Большим преимуществом таких систем является то, что при должном усовершенствовании модели, бильярды можно использовать и для некоторых экспериментальных исследований.

Бильярдные системы достаточно новая область, открывающая большие перспективы в исследовании давно известных проблем. Модель бильярда типа "стадион" имеет прямое физическое приложение, как модель статистической механики. Бильярды более подробно раскрывают проблему ускорения частиц до высоких энергий - ускорение Ферми. Эта проблема до сих пор привлекает к себе внимание исследователей из разных областей физики.

Целью магистерской работы является исследование моделей, описывающих эффект стохастического ускорения Ферми

- Получение отображения в случае учета потерь энергии (введение диссипации)
- Разработка программы для проведения численного исследования динамики моделей демонстрирующих ускорение Ферми-Улама
- Исследование влияния явления слабой диссипации на среднюю скорость частицы и на явление ускорения Ферми.

Основное содержание работы

Рассмотрим модель шарика, движущегося между двумя стенками, одна из которых будет совершать колебания по гармоническому закону. Такую модель, проиллюстрированную на рис.1, математик С. Улам предложил в начале 60-х годов.[10]

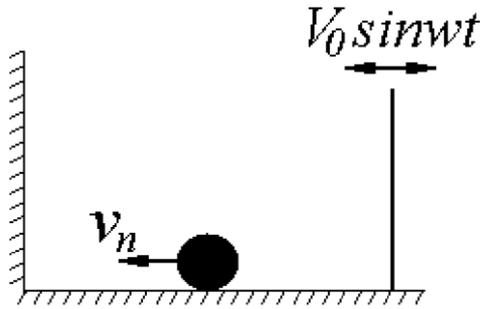


Рис. 1. Механическая система, иллюстрирующая модель Улама ускорения Ферми. [11]

Шарик свободно движется влево – вправо вдоль оси x , испытывая упругие соударения с двумя вертикальными стенками бесконечно большой массы. При соударении шарик теряет часть своей скорости. Стенки расположены на расстоянии L друг от друга. Одна из стенок совершает колебания с некоторой частотой ω по закону

$$V(t) = V_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Введем дискретные переменные: v_n - скорость шарика перед n -ым ударом и t_n - момент удара шарика о стенку.

Скорость стены перед n – ым ударом будет определяться, как

$$V_n = V_0 \sin \omega t_n. \quad (2)$$

Если шарик налетает на колеблющуюся стенку в момент t_n со скоростью v_n , то после упругого удара скорость шарика станет равной

$$v_{n+1} = (1 - \varepsilon) v_n + V_0 (2 - \varepsilon) \sin \omega t_n, \quad (3)$$

где ε - параметр, отвечающий за диссипацию.

При соударении со второй неподвижной стенкой, скорость шарика будет менять своё направление на противоположное, при этом по модулю останется неизменной.

Время пролета от одной стенки и обратно составляет $2L/v_{n+1}$, с другой стороны оно составляет разность между моментами времени $(n+1)$ -го и n -го удара $\tau = t_{n+1} - t_n$. Тогда момент $(n+1)$ -го удара можно определить, как

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2L}{v_{n+1}} \quad (4)$$

Перейдем к безразмерным переменным. Для этого сделаем замены $\varphi_n = \omega t_n$ и $V = \frac{v}{2L\omega}$, а так же обозначение $k = \frac{(2-\varepsilon)V_0}{2L\omega}$

В этом случае наше отображение примет вид

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (1 - \varepsilon)v_n + k \sin \varphi_n \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{1}{V_{n+1}} \bmod 2\pi \end{aligned} \quad (5)$$

Символ $\bmod 2\pi$ означает, что полученное значение переменной φ_{n+1} нужно отнормировать на 2π , то есть представить в вид $\varphi = 2\pi n + \tilde{\varphi}$, где $0 < \tilde{\varphi} < 2\pi$ и затем оставить только член φ отбросив $2\pi n$. Это вполне естественно, так как $\tilde{\varphi}$ является фазой колебаний плиты, а отличающиеся на 2π значения фазы физически не различимы.

Безразмерное отображение (5) характеризуется двумя параметрами: величиной диссипации ε и безразмерной амплитудой колебаний стола.

Для исследования эволюции аттракторов отображения Улама в случае с диссипацией, целесообразно построить фазовые портреты отображения (5). На рисунке 1 приведены фазовые портреты отображения с диссипацией.

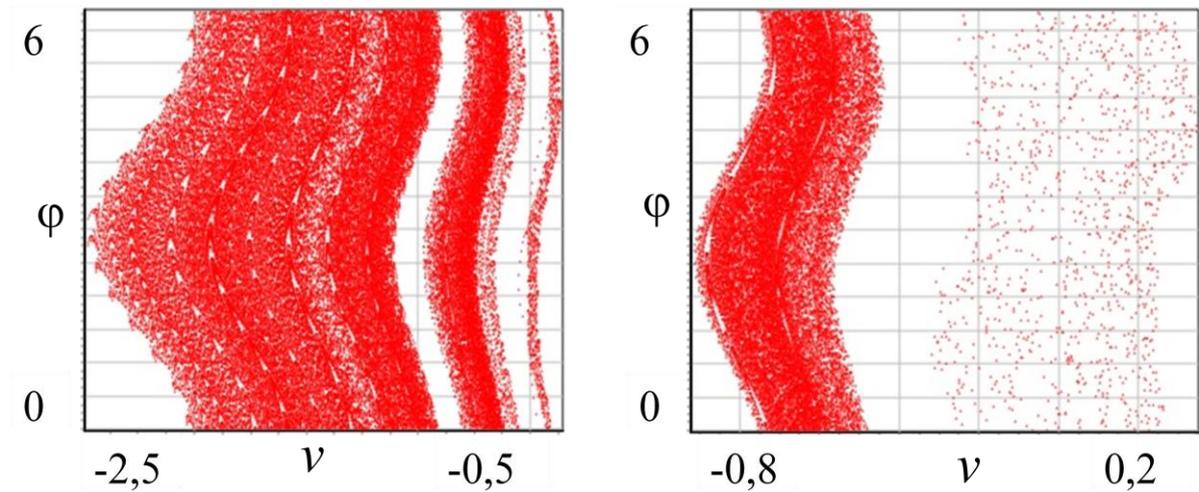


Рис.2. Фазовые портреты (5) при значениях параметров : (a) $\varepsilon=0,0001$, $k=0,1$, $n=10000$; (b) $\varepsilon=0,0001$, $k=0,1$, $n=20000$.

На рисунке (2) видно, как облако точек конденсируется на аттракторы. Из рисунка (a),(b) видно, как изображающие точки притягиваются к сложной слоистой структуре, даже при условии того, что значение параметра диссипации очень мало. На рисунках видно, что при увеличении переходного процесса вид фазового портрета схож с видом консервативного.

Рассмотрим модель бильярда типа "стадион", граница которого состоит из дуг двух окружностей и двух параллельных отрезков длины l , соединяющих концы этих дуг. Введем динамические переменные, как показано на рисунке (3). Положительным направлением для углов ϕ_n примем направление против часовой стрелки, а для угла α_n по часовой стрелке. Если граница бильярда неподвижна, то угол падения α_n^* равен углу отражения α_n . Пусть V_n — скорость частицы, а t_n — время n -го столкновения с границей.

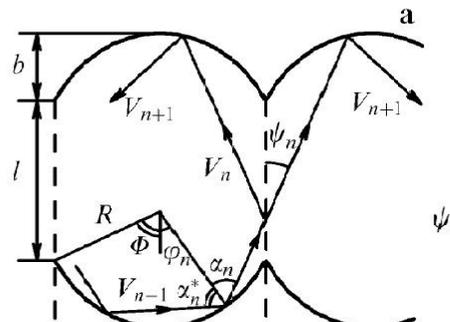


рис. 3. Модель бильярда типа "стадион"[4]

В случае парных столкновений геометрический анализ приводит к отображению вида:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1}^* &= \alpha_n \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^* \\
 \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \pmod{2\pi} \\
 t_{n+1} &= t_n + \frac{2R \cos \alpha_n}{V_n}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Если $|\varphi_{n+1}| < \Phi$, то частица продолжает каскад столкновений с одной границей. В противном случае (n+1)-е столкновение произойдет с другой фокусирующей компонентой. При переходе от одной фокусирующей компоненты к другой отображение запишется как

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n+1}^* &= \arcsin[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n] \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1}^* \\
 \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^* \\
 t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Где $\psi_n = \alpha_n - \varphi_n$, $x_n = [\sin \alpha + \sin(\Phi - \psi_n)]R / \cos \psi_n$, $x_{n+1}^* = x_n + l \tan \psi_n \pmod{a}$.

В случае с диссипацией, частица при столкновении с границей будет терять часть своей энергии, так как удар в системе не будет являться абсолютно упругим. В результате система перейдет к равновесному состоянию. Учет диссипации будет представлять собой обобщение отображения (6) и (7) в случае, когда границы колеблются по гармоническому закону (8). Если граница бильярда возмущается, то частица может переходить из хаотической области в регулярную и обратно.

$$U = U_0 \sin(\omega t) \tag{8}$$

Учитывая, что при столкновениях частиц с границей меняется только нормальная компонента скорости, а тангенциальная остается без изменений,

не трудно получить отображения для скорости (9), которое будет учитывать потери энергии при соударении со стенкой.

$$V_{n+1} = \sqrt{V_n^2 \sin^2 \alpha_{n+1} + ((1 - \varepsilon)V \cos \alpha_{n+1} + (2 - \varepsilon)U)^2} \quad (9)$$

В этих переменных отображение, описывающее динамику частицы в хаотических бильярдах, при неупругих соударениях с пульсирующими границами в случае парных столкновений запишется как

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+1} &= \arctg\left(\frac{V \sin \alpha_{n+1}^*}{(1 - \varepsilon)V \cos \alpha_{n+1}^* + (2 - \varepsilon)U}\right) \\ \varphi_{n+1} &= 2\pi\left(\frac{\phi + \pi - 2\alpha_{n+1}}{2\pi}\right) \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{(2R \cos \alpha_n)}{V_{n+1}} \end{aligned} \quad (10)$$

Если $|\varphi_{n+1}| < \Phi$, то частица продолжает каскад столкновений с одной границей, как и в случае без диссипации. В противном случае (n+1)-е столкновение произойдет с другой фокусирующей компонентой. При переходе от одной фокусирующей компоненты к другой отображение запишется как

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}^* &= \arcsin\left[\sin(\psi_n + \Phi) - \frac{x_{n+1}^*}{R} \cos \psi_n\right] \\ \alpha_{n+1} &= \arctg\left(\frac{V \sin \alpha_{n+1}^*}{(1 - \varepsilon)V \cos \alpha_{n+1}^* + (2 - \varepsilon)U}\right) \\ \varphi_{n+1} &= \psi_n - \alpha_{n+1}^* \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{R(\cos \varphi_n + \cos \varphi_{n+1} - 2 \cos \Phi) + l}{V_n \cos \psi_n} \end{aligned} \quad (11)$$

Где ε - параметр диссипации.

На рисунке 4. представлены полученные численно фазовые портреты бильярда типа "стадион", задаваемый отображением (6) и (7) при разных значениях параметров.

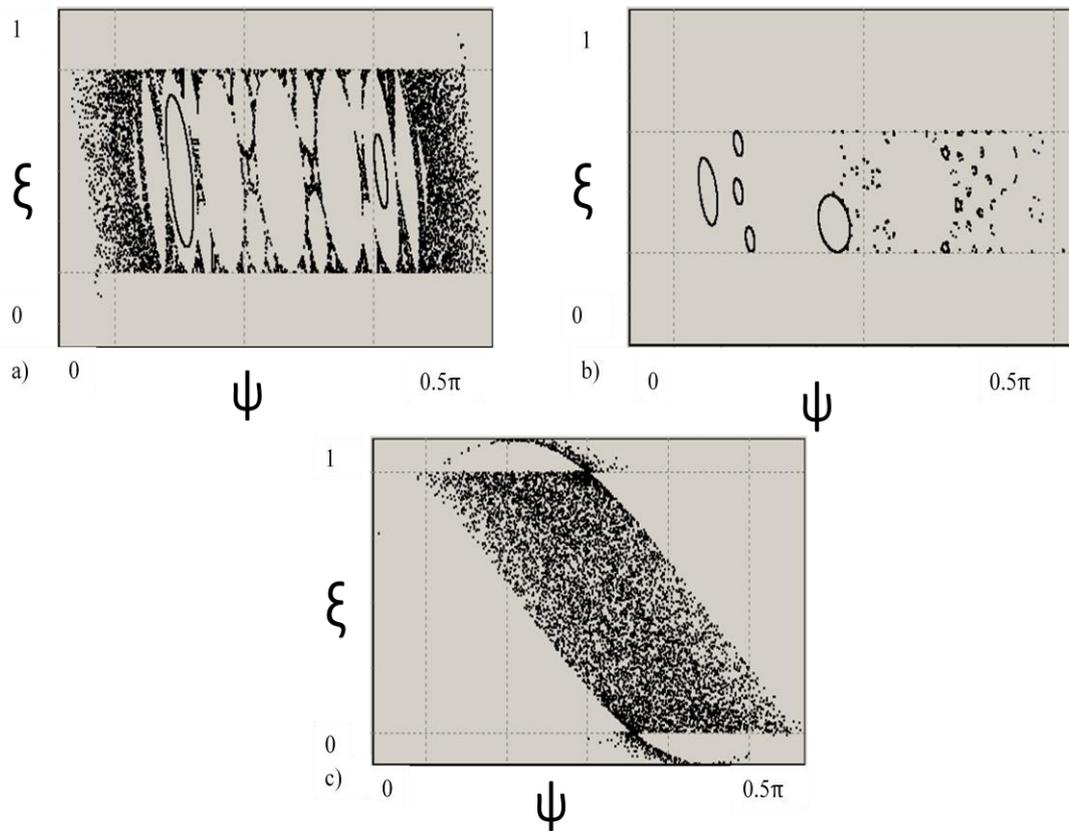


рис.4. Фазовые портреты бильярда типа "стадион" с границей в виде дуги окружности при а) $a=0.5, b=0.001, l=1$; б) $a=1, b=0.001, l=1$; в) $a=0.1, b=0.001, l=1$

Из рисунка (4) видно, что в системе существуют устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми. Динамика частиц в окрестностях этих точек является регулярной, отвечающей движению вдоль таких инвариантных кривых. Области, соответствующие различным резонансам, разделены сепаратрисами, окруженными стохастическим слоем. Ширина этого слоя определяется степенью нелинейности системы. Частица, начав движение в таком слое, посещает все доступные ей области хаотическим образом. С возрастанием нелинейности неподвижные точки теряют устойчивость, в результате чего образуется область глобальной стохастичности, в которой частице доступно уже все фазовое пространство.

На рисунках (5) представлены полученные численно фазовые портреты бильярда типа "стадион" в случае, когда в системе присутствуют потери энергии.

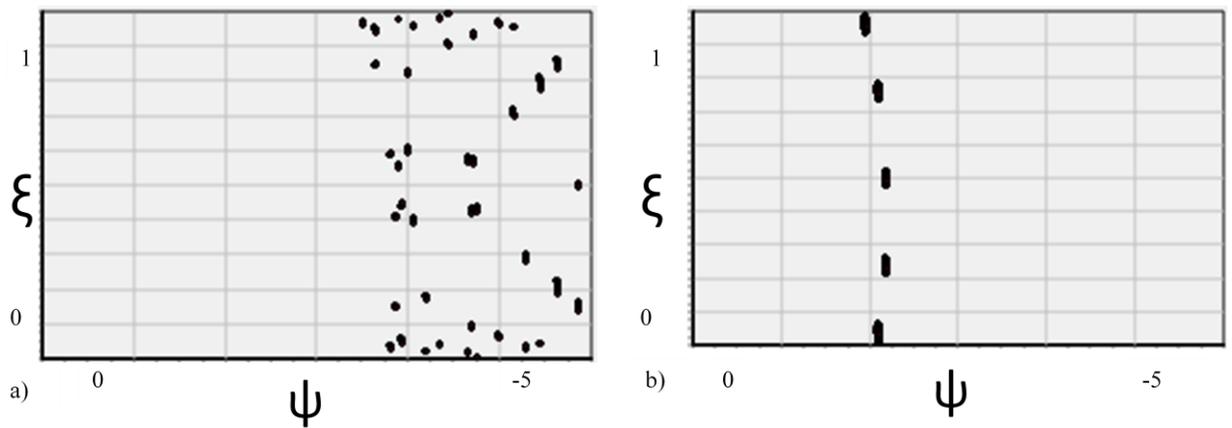


рис.5. Фазовые портреты бильярда типа "стадион" с границей в виде дуги окружности при а) $a=0.5, b=0.001, l=1, e=0.7$; б) $a=0.5, b=0.001, l=1, e=0.9$

При увеличении параметра диссипации ϵ на рисунке (5) видно, что облака изображающих точек начинают конденсироваться на аттракторах.

На рисунках (6) представлены полученные численно зависимости скорости V от числа столкновений n с границей в случае с потерями энергии и без потерь, при разных параметрах, задаваемые отображением (8) - (11), полученные на основе усреднения скоростей 100 частиц при 5000 итераций.

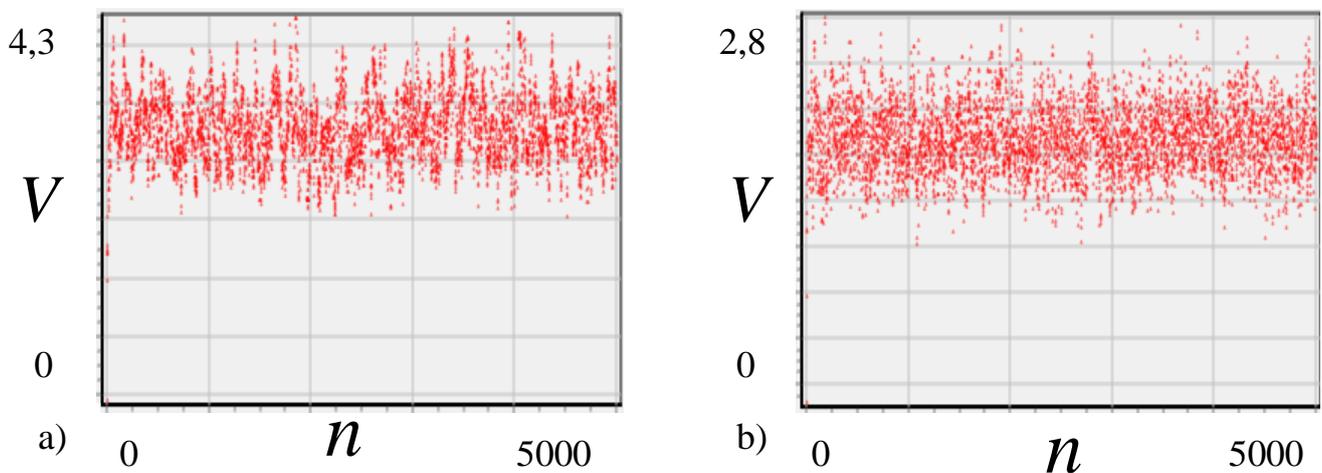


рис.6. Зависимость скорости от количества итераций при заданных параметрах $a=0.5, b=0.2, l=1, U=1, V=1$ при разных значения параметра диссипации e : а) $e=0.1$, б) $e=0.2$, в) $e=0.4$, д) $e=0.8$,

На рисунке (6) видно, что при изменяющемся параметре диссипации e график скорости представляет собой ломаную флуктуирующую кривую.

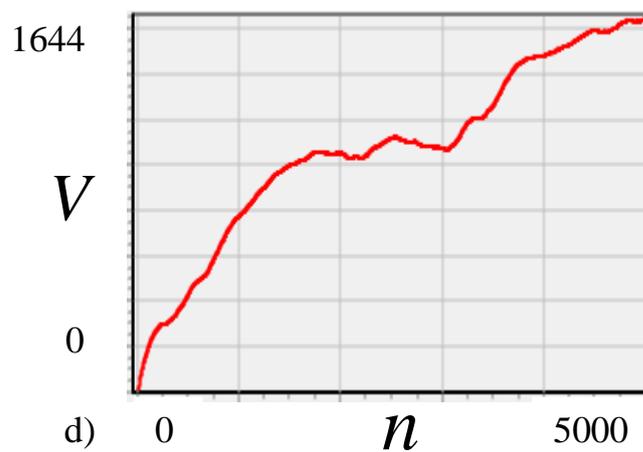
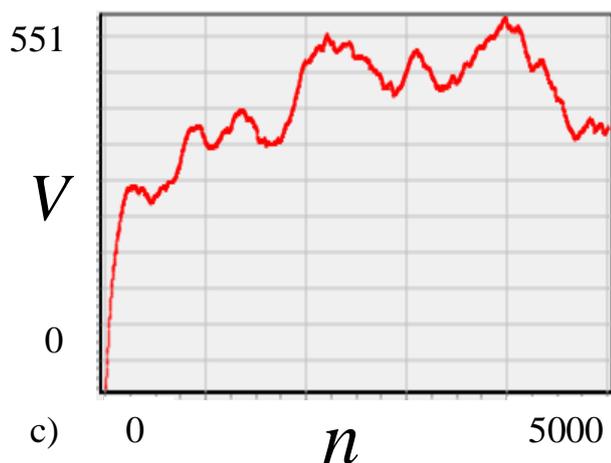
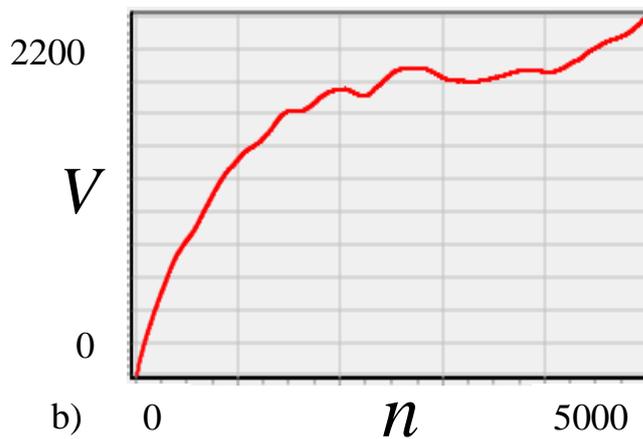
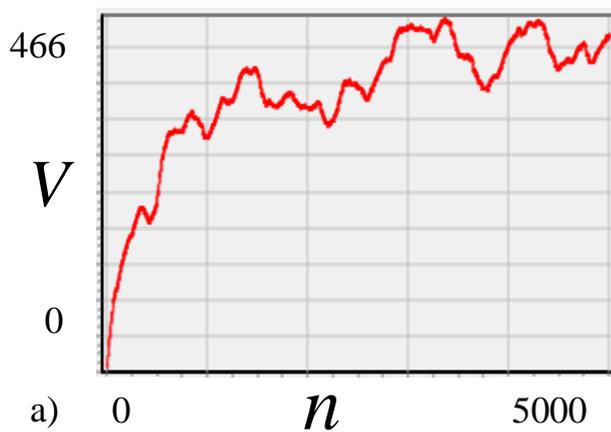


рис.7. Зависимость скорости от количества итераций при разных параметрах а) $a=0.5$, $b=0.01$, $l=1$, $e=0.005$, $U=5$, $V=5$, б) $a=0.5$, $b=0.01$, $l=1$, $e=0.001$, $U=5$, $V=5$, в) $a=0.5$, $b=0.01$, $l=1$, $e=0.005$, $U=5$, $V=10$, г) $a=0.5$, $b=0.01$, $l=1$, $e=0.001$, $U=5$, $V=15$

На рисунке (7) видно, что при достаточно маленьких значениях параметра диссипации равном 0,001 и 0,005 и высоких начальных значениях скорости шарика и скорости колебания стенки в системе так же, как и в случае при отсутствии потерь энергии наблюдается рост средней скорости частицы. Таким образом можно сделать вывод, что в системе бильярд типа "стадион" в случае, когда в системе присутствует слабая диссипация так же наблюдается эффект ускорения Ферми.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был проведён анализ динамики системы бильярд типа «стадион» в случае, когда в системе присутствуют потери энергии, и исследована динамика отображения Улама в консервативном, диссипативных и слабо диссипативных случаях. Был исследован процесс эволюции аттракторов и облака изображающих точек при изменении основных параметров. Так же стоит отметить, что в случае, когда параметр диссипации был довольно мал, система демонстрировала довольно сложную динамику, демонстрируя черты как диссипативного, так и консервативного режимов, показывая своеобразную динамику слабодиссипативной системы. Была исследована динамика модели бильярда типа "стадион" получен численно фазовый портрет и построены зависимости скорости от числа столкновений n с границей $V(n)$, задаваемый отображениями. На рисунках можно видеть, что фазовый портрет содержит устойчивые неподвижные точки, окруженные инвариантными кривыми. Динамика бильярдных частиц вблизи этих точек регулярна. Как видно из полученных зависимостей $V(n)$, скорость частицы заметно изменяется в случае, когда в системе присутствует диссипация. В системе бильярд типа «стадион» с осциллирующими границами наблюдается неограниченный рост скорости частицы в случае, когда система проявляет хаотическую динамику, это говорит о том, что системе присуще ускорение Ферми. При вводе параметра диссипации наблюдались изменения в скорости частицы, из которых можно сделать вывод, что рост скорости частицы и наблюдение явления ускорения Ферми возможно лишь в случае введения очень маленькой величины параметра диссипации ε .

Список литературы

1. Fermi E. On the origin of the cosmic radiation// Phys. Rev., 1949, vol 75, no.8 , pp. 1169-1174
2. de Carvalho R.E., Souza F.C., Leonel E.D. Fermi acceleration on the annular billiard// Phys. Rev. E.,2006 vol. 73,no. 6, 066229, 10p.
3. Livorati A.L.,Laderia D., Leonel E.D. Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model// Phys. Rev.E, 2008,vol. 78, no 5, 056205, 12 p.
4. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
5. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
6. А.Ю. Лоскутов.Динамический хаос. Системы классической механики.
7. Бунимович Л.А. Системы гиперболического типа с особенностями. // Динамические системы-2/ Я.Г. Синай (ред.). (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.Т.2) М.:ВИНИТИБ 1985. с. 173-204.
8. Крылов Н.С. РАботы по обоснованию статистической физики. М.-Л.:АН СССР, 1950. 207с.
9. Биркгоф Дж. Динамические системы. М.-Ижевск: Изд.дом "Удмуртский ун-т", 1999. 408с.
- 10.Кузнецов С.П.. Динамический хаос (курс лекций). – М.: Из-во Физ.-мат. лит, 2001. – 296 с.
- 11.Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991, 368 с.