

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра динамических систем

**Модифицированная модель Неймарка, как при-
мер автономной системы с аттрактором
Смейла – Вильямса**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 214 группы

Направления 03.04.01 Прикладная математика и физика

Факультет нелинейных процессов

Хаджиевой Лейлы Мухамед - Бухараевны

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор _____

Кузнецов С.П.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____

Кузнецов А.П.

Саратов 2016 г.

Актуальность исследований

Хаотические колебания в диссипативных динамических системах обусловлены существованием в фазовом пространстве странного аттрактора – сложно устроенного притягивающего множества, к которому стремятся все траектории в некоторой области фазового пространства. В теории динамических систем особое место занимают однородно гиперболические аттракторы. Такие аттракторы состоят только из седловых (гиперболических) траекторий [1-4].

В системах с гиперболическим аттрактором существование хаоса строго доказано. Такие системы обладают свойством грубости или структурной устойчивости. Это означает, что структура их фазового пространства и характер динамики нечувствительны к изменению параметров и функций, входящих в описывающие динамику уравнения [4].

Для возникновения аттрактора Смейла–Вильямса в сечении Пуанкаре некоторой системы необходимо, чтобы существовала динамическая переменная, которая подвергается растягивающему отображению окружности (увеличивается в целое число раз) при однократном действии отображения Пуанкаре, а по остальным переменным фазовый объем сжимается [1–5]. Эта переменная может представлять собой фазу колебаний, а сечение Пуанкаре происходит через характерный для системы временной интервал. Аттрактор Смейла – Вильямса имеет место в модельной диссипативной динамической системе, задаваемой отображением трехмерного пространства в себя (рис.1) [12].

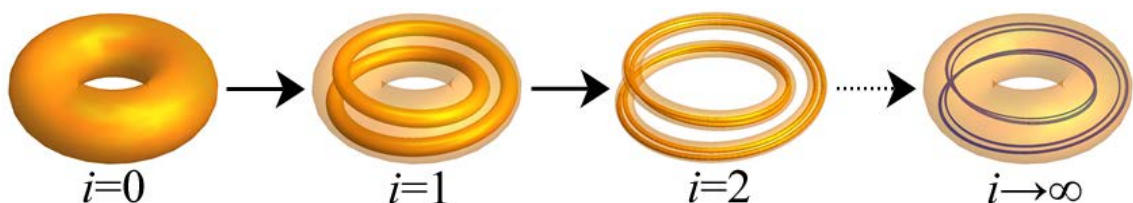


Рис.1 Построение аттрактора Смейла-Вильямса

Цель работы

Целью данной работы является физическая реализация системы с однородно гиперболическим аттрактором на основе модифицированной модели Неймарка с сепаратрисой в виде восьмерки.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1) Конструирование уравнений. Получение математической модели, описывающейся автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Численное исследование модели: построение реализаций, портретов аттракторов.

2) Обоснование гиперболичности аттрактора в отображении Пуанкаре. Представление динамики угловой переменной. Получение итерационной диаграммы для угловой переменной.

3) Получение зависимостей показателей Ляпунова от параметров для разных путей на плоскости параметров. Построение графиков их зависимостей от параметров системы.

Новизна

В работе впервые введена в рассмотрение система на основе модифицированной модели Неймарка с сепаратрисой в виде восьмерки. Построенная на этой основе система является новой, и ранее не исследовалась.

Практическая значимость

Режимы с гиперболическими аттракторами могут быть реализованы в физических системах. Однородно гиперболические аттракторы структурно устойчивы, так что, немного изменяя параметры системы, мы все еще получаем гиперболические хаос. Кроме того, гиперболические аттракторы не разрушаются шумом, пока он не очень велик.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены докладами на X Всероссийской конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2015г.) и школе – конференции «Нелиней-

ные дни в Саратове для молодых» (2015г.):

1. Л.М.-Б. Хаджиева, В.П. Круглов. Аттрактор Смейла-Вильямса в модифицированной модели Неймарка. Тезисы докладов X Всероссийской конференции молодых ученых. Саратов, 8-10 сентября 2015 г. Саратов, изд-во «Техно-Декор», 2015, 182-183.
2. Л.М.-Б. Хаджиева, В.П.Круглов. Гиперболический аттрактор в системе связанных модифицированных осцилляторов Неймарка. Школа – конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2015». Саратов, 24-26 ноября 2015 г.
3. L. Khadzhieva, V. Kruglov. Smale-Williams attractor in a modified Neimark model. Sixth International Conference "Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2016". Book of Abstracts. 2-5 June 2016. Izhevsk, Russia. Moscow – Izhevsk: Publishing Center "Institute of Computer Science", 2016. P.27-28.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 16-02-00449.

Краткое содержание работы

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа содержит 47 страниц, включая 20 рисунков и 1 таблицу. Список литературы включает 14 наименований.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность исследований, показана новизна работы, ее практическая значимость, поставлены цели и задачи исследования.

В первой главе предложена модель автономной системы с аттрактором Смейла-Вильямса. Система представляет собой два связанных осциллятора Неймарка с «восьмеркообразной» сепаратрисой [6]. Принцип работы основан на утроении угловой переменной за некоторый характерный интервал времени, что является условием существования аттрактора Смейла-Вильямса

в фазовом пространстве. Математически модель описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка.

В первом разделе приведены уравнения и объясняется принцип действия рассматриваемой системы. Во втором разделе представлены основные результаты, полученные при численном моделировании. Также вычислены показатели Ляпунова для аттрактора отображения Пуанкаре.

Во второй главе представлены результаты численных расчетов по проверке условий гиперболичности хаотического аттрактора в отображении Пуанкаре для исследуемой системы. В первом разделе представлены портреты аттракторов в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость. Во втором разделе содержатся итерационные диаграммы для угловой переменной $\varphi = \arg(x + iy)$, выступающие как главное свидетельство наличия аттрактора Смейла – Вильямса.

В третьем разделе вычислены показатели Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму – Шмидту. Также проведена оценка фрактальной размерности для аттрактора в отображении Пуанкаре при значениях по формуле Каплана-Йорке.

В четвертом разделе приведены зависимости показателей Ляпунова от параметра для разных путей на плоскости параметров

Исходной является система, в которой возможны периодические автоколебания, и при определенном выборе параметра L предельный цикл располагается на сепаратрисе [1]:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= U \\ \dot{U} &= (1 - X^2)X + [L - (X^2 - 1)^2]U\end{aligned}\tag{1}$$

Рассмотрим две такие системы, характеризуемые обобщенными координатами x и y так, чтобы величина $x^2 + y^2$ демонстрировала такую же динамику, как X^2 в предыдущей модели. Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{u} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (x^2 + y^2 - 1)^2]u \\
\dot{y} &= v \\
\dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (x^2 + y^2 - 1)^2]v
\end{aligned} \tag{2}$$

Введем связь так, чтобы при проходе вблизи седловой точки происходило утроение угловой переменной, в качестве которой выступает аргумент комплексного числа $x + iy$:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{u} &= (1 - x^2 - y^2)x + [L - (x^2 + y^2 - 1)^2]u + \varepsilon(u^3 - 3uv^2) \\
\dot{y} &= v \\
\dot{v} &= (1 - x^2 - y^2)y + [L - (x^2 + y^2 - 1)^2]v + \varepsilon(3u^2v - v^3)
\end{aligned} \tag{3}$$

Сечение Пуанкаре произведем поверхностью $S = x^2 + y^2 = 1$. Рассмотрим пересечение траекторий в направлении увеличения S . Угловая переменная определяется как аргумент комплексного числа $x + iy$.

Уравнение можно записать в комплексной форме, введя переменные $z = x + iy$ и $w = u + iv$:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= w, \\
\dot{w} &= (1 - |z|^2)z + [L - (1 - |z|^2)^2]w + \varepsilon w^3.
\end{aligned} \tag{4}$$

Система (3) решалась численно методом Рунге-Кутты 4 порядка.

На рис. 2 представлен фазовый портрет для системы (3). Можно видеть, что при выбранных параметрах наблюдается нерегулярная динамика. Далее, на рис. 3 приведены временные зависимости переменных x, y, u, v при заданных трех пар значений параметров.

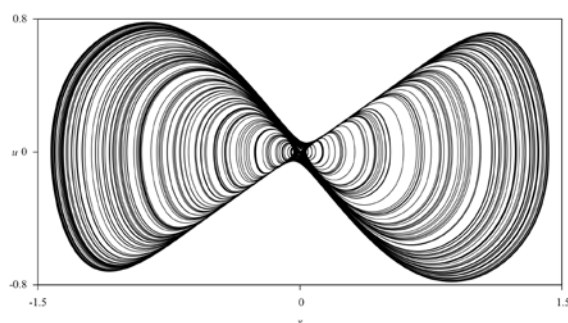


Рис.2. Фазовый портрет для системы (3) в проекции на плоскость переменных x и u при выборе параметров $L = 0.32; \varepsilon = 0.02$

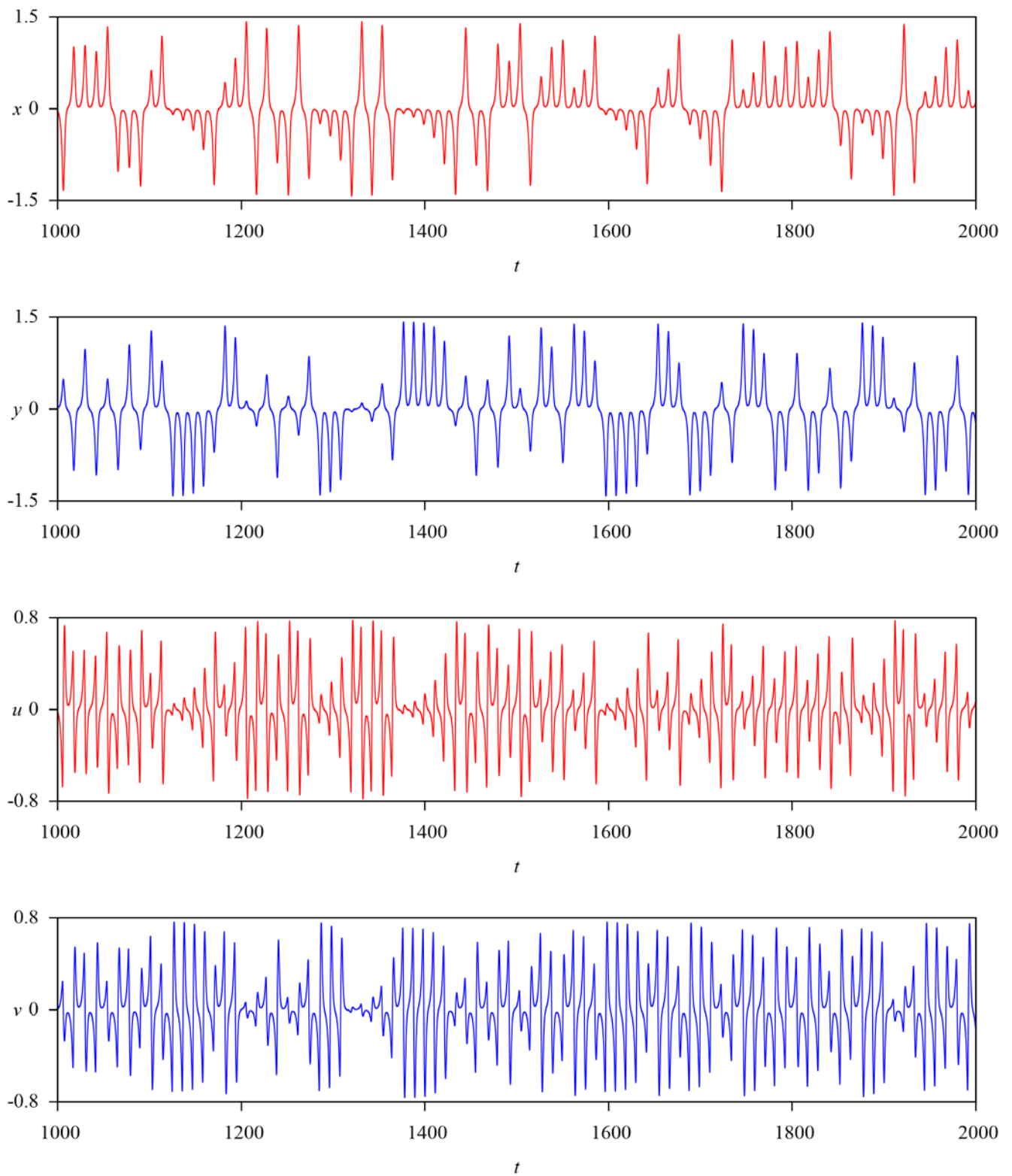


Рис. 3. Зависимости динамических переменных x , y , u , v от времени, полученные при численном решении системы (3) при выборе параметров $L = 0.32$, $\varepsilon = 0.02$

Существенной частью математической теории динамического хаоса в нелинейных системах является концепция гиперболичности.

Для интерпретации аттрактора как гиперболического, мы будем работать с угловой переменной, которая в момент пересечения поверхности $S = x^2 + y^2 = 1$ в направлении в увеличения S определяется как аргумент комплексного числа $x + iy$.

На рис. 4 изображен портрет аттрактора в сечении Пуанкаре в проекции на фазовую плоскость.

Тонкую структуру аттрактора, предположительно представляющего собой соленоид Смейла-Вильямса, не удастся рассмотреть из-за сильного поперечного сжатия.

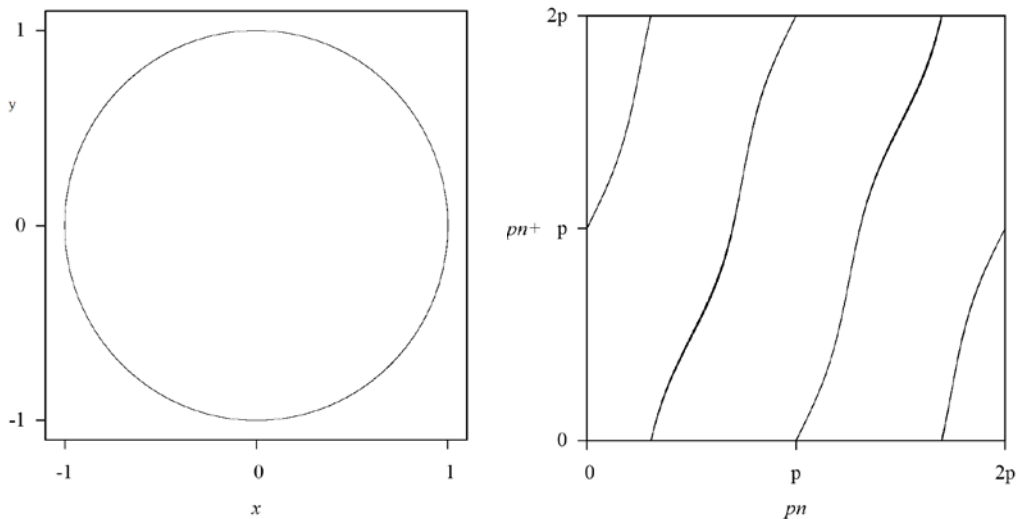


Рис.4. Портрет аттрактора в сечении Пуанкаре по результатам численного решения уравнений системы (3) при указанных параметрах $L = 0.32$, $\varepsilon = 0.02$

Рис.5. Итерационная диаграмма для угловой переменной системы (3), выступающая как главное свидетельство наличия аттрактора Смейла – Вильямса при выборе параметров $L = 0.32; \varepsilon = 0.02$

Динамика угловой переменной приближенно описывается отображением Бернулли $\varphi_{n+1} = 3\varphi_n + \text{const}(\text{mod}2\pi)$. Это позволяет предполагать, что аттрактор в сечении Пуанкаре представляет собой соленоид Смейла-Вильямса [6]. На рис. 5 приводится итерационная диаграмма для угловой переменной $\varphi = \arg(x + iy)$, выступающая как главное свидетельство наличия аттрактора

Смейла - Вильямса [7,8].

Для аттрактора исходной системы в сечении Пуанкаре были вычислены показатели Ляпунова по алгоритму Бенеттина с ортогонализацией по Граму – Шмидту. При значениях параметров $L = 0.32; 0.315; 0.325$ и $\varepsilon = 0.02; 0.015; 0.03$ получены полные спектры показателей Ляпунова:

L/ε	Λ_1	Λ_2	Λ_3		T
0.315/ 0.015	0.9962	- 0.0565	- 4.0804	- 5.5127	10.1931
0.32/ 0.02	0.1082	0.00001	-0.4011	-0.522	9.622
0.325/ 0.03	1.0084	0.0003	- 3.3549	- 4.5514	8.9589

Таблица 1. Полные спектры показателей Ляпунова

Рассмотрим результаты для набора параметров $L = 0.32$ и $\varepsilon = 0.02$. Старший показатель Ляпунова положительный, что является количественным подтверждением присутствия хаоса. Умножив старший показатель Ляпунова на средний период между последовательными итерациями отображения Пуанкаре $T_{av} = 9.622 \pm 0.005$, получим старший показатель Ляпунова для отображения Пуанкаре $\Lambda_1 = 1.041$. Эта величина близка к $\ln 3$, показателю Ляпунова отображения Бернулли, которое приближенно описывает динамику фазы колебаний в системе. Второй показатель равен нулю с учетом ошибки вычислений. Остальные показатели отрицательные. Таким образом, элемент объема в фазовом пространстве отображения Пуанкаре за одну итерацию испытывает растяжение по одному направлению и сжатие по остальным двум. Это соответствует построению аттрактора типа Смейла-Вильямса

Оценка фрактальной размерности для аттрактора в отображении Пуанкаре при значениях $L = 0.32$ и $\varepsilon = 0.02$ по формуле Каплана-Йорке состав-

вит: $D_{KY} = 1 + \Lambda_1 / |\Lambda_2| \approx 1,27$ [3] .

На рисунках 6, 7 показаны зависимости показателей Ляпунова отображения Пуанкаре для системы с утроением фазы от параметра L и параметра ε в виде графиков.

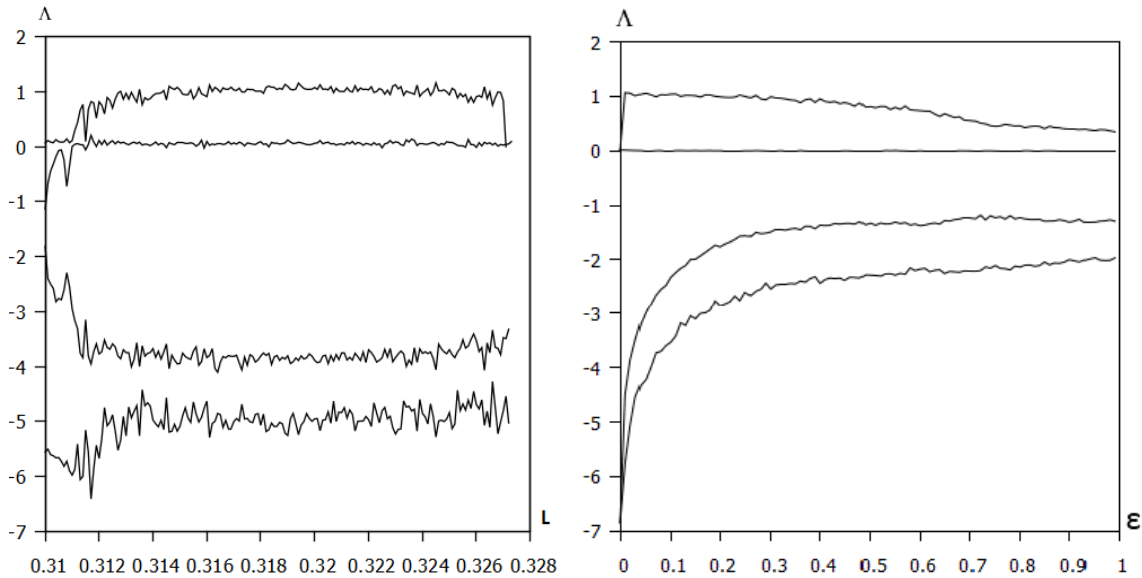


Рис.6. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (3) в зависимости от параметра L при выборе $\varepsilon = 0.02$

Рис. 7. Показатели Ляпунова для отображения Пуанкаре системы (3) в зависимости от параметра ε . при выборе $L = 0.32$

На графиках зависимостей показателей Ляпунова от параметра L есть участок, на котором старший показатель близок к $\ln 3$, показателю Ляпунова отображения Бернулли. Резкие переходы зависимости в отрицательную область отсутствуют на участке $[0.314;0.326]$.

На графике зависимостей показателей Ляпунова от параметра ε также есть область, на которой старший показатель близок к $\ln 3$. Эта область соответствует малым значениям ε . Старший показатель гладко зависит от параметра, резкие провалы в отрицательную область, характерные для негиперболических аттракторов, отсутствуют.

Основные выводы и результаты работы

В работе предложена автономная система дифференциальных уравнений, в которой реализуется аттрактор в виде соленоида Смейла-Вильямса. Модель состоит из двух автоколебательных подсистем. Связь между ними такова, что при прохождении вблизи седловой точки происходит утроение угловой переменной, характеризующей фазовый сдвиг между колебаниями двух подсистем.

Предложенная система генерирует нерегулярные колебания. В сечении Пуанкаре системы наблюдается аттрактор, предположительно, типа Смейла-Вильямса. Динамика угловой переменной описывается отображением Бернулли. Вычислены показатели Ляпунова отображения Пуанкаре. При этом величина старшего показателя приближенно равна $\ln 3$, что соответствует приближенному описанию динамики фазы колебаний растягивающим отображением окружности.

Построены зависимости от параметров показателей Ляпунова отображения Пуанкаре системы двух связанных осцилляторов Неймарка с «восьмеркообразной» сепаратрисой. Найдены интервалы значений параметров, при которых реализуется аттрактор типа Смейла-Вильямса. На этих участках старший показатель Ляпунова близок к показателю Ляпунова отображения Бернулли, которое отвечает за динамику угловой переменной. Провалы старшего показателя в отрицательную область на этом интервале отсутствуют.

Некоторые модели динамических систем, демонстрирующие однородно гиперболические аттракторы, действительно могут оказаться физически реализуемыми. Долгое время однородно гиперболические аттракторы считались математической абстракцией, не имеющей отношения к реальным явлениям. На данный момент предложен ряд примеров систем разной физической природы с гиперболическими аттракторами.

Однородно гиперболические аттракторы обладают несколькими полезными свойствами.

Во-первых, однородно гиперболические аттракторы структурно устойчивы. Это значит, что немного изменяя параметры системы, мы все еще получаем гиперболические хаос. Кроме того, гиперболические аттракторы не разрушаются шумом (если он не очень велик).

Во-вторых, каждой траектории на гиперболическом аттракторе можно поставить в соответствие уникальную бесконечную в обе стороны последовательность из конечного набора символов (это называется символической динамикой). Например, аттрактор Смейла-Вильямса можно условно разделить на две части, при попадании траектории в одну из этих частей мы прописываем новый символ в последовательности: 0 или 1. Значит, каждая траектория кодируется бинарной последовательностью. Это свойство можно использовать для шифрования или скрытой передачи информации. Кроме того, системы с аттракторов Смейла-Вильямса можно использовать как генераторы псевдослучайных чисел, ведь выбранная наугад траектория это беспорядочная последовательность нулей и единиц.

Цитируемая литература

- [1] Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. – Наука, 1972.М., Наука, 1972, с. 129-135.
- [2] Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.Л. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987 б с.303 и далее.
- [3] С.П.Кузнецов. Динамический хаос, 2-е изд. Москва: Физматлит, 2006.
- [4] С.П. Кузнецов. Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. ИКИ Москва - Ижевск, 2013.
- [5] Kuznetsov S.P. and Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. *Physica D* **232**, 2007, 87–102.

- [6] Круглов В. П. Кольцевой неавтономный генератор гиперболического хаоса //Известия вузов – Прикладная нелинейная динамика. – 2010. – Т. 18. – С. 138-150.
- [7] Кузнецов С. П. Параметрический генератор грубого хаоса: схемотехническая реализация и моделирование в программной среде Multisim //Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2014. – Т. 3. – №. 1 (76).
- [8] Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике //Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181. – №. 2. – С. 121-149.
- [9] Мандельштам Л.И. Лекции по колебаниям / Л.И. Мандельштам. М.: Изд – во АН СССР, 1955. 512с.
- [10] Кузнецов С. П. Гиперболические странные аттракторы систем, допускающих физическую реализацию //Изв. вузов. ПНД. – 2009. – Т. 17. – №. 4. – С. 5.
- [11] Кузнецов С. П., Сатаев И. Р. Проверка условий гиперболичности хаотического аттрактора в системе связанных неавтономных осцилляторов ван дер Поля //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2006. – Т. 14. – №. 5. – С. 3-29.
- [12] Круглов В. П. Методика и результаты численной проверки гиперболической природы аттракторов для редуцированных моделей распределенных систем.
- [13] Кузнецов А. П. и др. Хаотическая динамика в системах связанных неавтономных осцилляторов с резонансным и нерезонансным механизмом передачи возбуждения //Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2007. – Т. 15. – №. 6. – С. 75.
- [14] Синай Я. Г. Стохастичность динамических систем //Нелинейные волны. М.: Наука. – 1979. – С. 192-212.