Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

Статистика возвратов Пуанкаре и размерность Афраймовича-Песина в гамильтоновых системах

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 241 группы
направления 03.04.03 «Радиофизика»
физического факультета
Галактионовой Татьяны Игоревны

Научный руководитель
ассистент ____________________ Н.И. Семенова

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., профессор ____________________ В.С. Анищенко

г. Саратов 2016

Введение

Одной из фундаментальных особенностей временной эволюции динамических систем является возвращаемость Пуанкаре. Для систем с заданной мерой почти любая траектория в фазовом пространстве рано или поздно возвращается в окрестность начального состояния. Это свойство Пуанкаре назвал устойчивостью по Пуассону. Для систем с хаотической динамикой времена возврата Пуанкаре представляют собой случайную последовательность, и для описания используются статистические методы.

Существует два подхода к анализу возвратов Пуанкаре: локальный и глобальный. В отличие от классического "локального" подхода, когда анализируются возвраты Пуанкаре в некую окрестность ε заданного начального состояния, при глобальном подходе исследуются характеристики возвратов в исследуемое множество в целом. При глобальном подходе характеристикой статистики возвратов Пуанкаре служит размерность времен возвратов, названная размерностью Афраймовича-Песина (АП-размерность).

Статистика времен возврата при глобальном рассмотрении зависит от топологической энтропии h_T. Случай $h_T > 0$, соответствующий множествам с перемешиванием, уже был детально исследован теоретически, а выводы теории уже были подтверждены при помощи численных экспериментов. Что же касается множеств без перемешивания ($h_T = 0$), то здесь картина совершенно иная. Движение в этом случае характеризуется отсутствием перемешивания, но является эргодическим. Самым простым примером таких систем является отображение окружности. Не так давно при численном исследовании отображения окружности были получены интересные результаты, которые отличаются от теоретически предсказанных. Были выявлены некоторые интересные закономерности, не отраженные в теории, в частности, "лестница Фибоначчи". "Лестница Фибоначчи" – это ступенчатая функция, полученная при расчете зависимости минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата.

В данной работе речь пойдет о статистике времен возврата Пуанкаре для гамильтоновых систем, в частности неавтономного консервативного осциллятора. Фазовый портрет этой системы представляет собой множество окружностей, из чего следует предположение, что статистика возвратов Пуанкаре в этой системе будет иметь сходство с лестницей Фибоначчи. Интерес представляет прежде всего поведение системы в случае разных значений амплитуды внешнего воздействия.

Основное содержание работы

В первой главе и второй главе дипломной работы представлен краткий теоретический обзор математической теории, описывающей гамильтоновы системы и времёна возврата Пуанкаре. Приведена формулировка определения времени возврата Пуанкаре для дискретной системы. Представлены основные математические выражения, с помощью которых проводится мультифрактальный анализ последовательности времён возврата Пуанкаре.

Обобщение теоретических результатов и задача исследования. Одним из примеров гамильтоновых систем является неавтономный консервативный осциллятор, который описывается системой трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x + b \sin \Theta \\ \dot{\Theta} &= \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Как видно из уравнения (1), амплитуда колебаний маятника без внешнего воздействия равна 1, как и собственная частота колебаний $\omega_0 = 1$. К системе приложено внешнее гармоническое воздействие с амплитудой b и частотой Ω. Динамика такой системы представляет собой движение по двумерному тору, которое зависит от отношения частот Ω/ω_0. Если это отношение рациональное, то траектория системы замыкается и возвращается в исходную точку, из которой она вышла, т.е. движение носит периодический характер. Если же отношение частот иррационально, то фазовая траектория системы (1) не замыкается сама на себя, и с течением времени всюду плотно покрывает поверхность двумерного тора (эргодический случай).

Возвраты Пуанкаре на инвариантных кривых гамильтоновой системы. В данном разделе рассматривается статистика возвратов Пуанкаре при глобальном подходе. Одними из основных характеристик глобального подхода являются среднее минимальное время возврата Пуанкаре $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$ и размерность Афраймовича-Песина α_c. При малых значениях параметра b, фазовые портреты и стробоскопические сечения представляют собой набор окружностей.

Если же значение параметра b большое, а отношение частот собственной и внешнего воздействия рационально, то в фазовом пространстве проявляется типичная структура гамильтоновых систем, а именно, можно заметить дополнительные неподвижные точки, окруженные периодическими траекториями, из которых образуются острова устойчивости.

Случай малых амплитуд. Рассмотрим случай малого параметра $b = 0.001$ и произведем численный расчет для нахождения фазового портрета и стробоскопического сечения. Полученные результаты соответствуют множеству окружностей и эллипсов. Для того, чтобы выбрать конкретное множество точек необходимо зафиксировать начальные условия. В данном случае были выбраны следующие условия: $x_0 = 0.44, y_0 = 0$. В этом случае фазовым портретом является окружность радиуса $r \approx 0.44$, поэтому для описания поведения системы удобнее перейти к радиальным координатам, и рассматривать изменение только одной координаты – угла поворота ψ.

Для вычисления возвратов Пуанкаре будет рассмотрен случай $b = 0.001$. При этом выберем параметр Ω, соответствующий золотому сечению, т.е. число вращения должно быть равно $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$. При выборе параметра $b = 0.001$ и окружности с радиусом 0.44 такое число вращения соответствует $\Omega \approx 1.598234$.

В случае ***отображения окружности*** была получена зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от окрестности возврата $\tau_{\inf}(\varepsilon)$.

При этом вычисления проводились без усреднения (в окрестность только одной точки), так как распределение плотности вероятности на окружности в системе было равномерным. Поэтому результаты с усреднением по ансамблю ничем не отличались от таких же без усреднения.

В ходе исследования системы (1) было замечено, что несмотря на малый параметр $b = 0.001$, при анализе вынужденных колебаний маятника плотность распределения вероятности исследуемой системы на окружности радиуса ≈ 0.44 неравномерна. Поэтому усреднение по множеству точек нельзя заменить расчетами для одной точки. Для подтверждения данного утверждения рассмотрим Рис. 1a, на котором показаны зависимости $\tau_{\inf}(\varepsilon)$ в случае расчетов возвратов в окрестность двух точек: $\psi_0 = \pi/3$ и $\psi_0 = 2\pi/3$. Из графиков можно сделать следующий вывод: зависимости начинают расходиться, начиная с некоторой ступеньки $\tau_{\inf} = 13$, что свидетельствует о необходимости усреднения по ансамблю точек и применения глобального подхода.

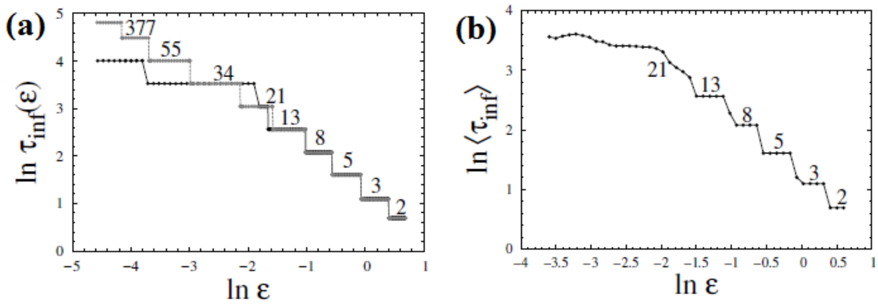

Рис. 1: a–Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при локальном подходе в системе (1) при $b = 0.001$, $\Omega = 1.598233989$ и начальных условиях $x_0 = 0.44$, $y_0 = 0$. Черная кривая соответствует окрестности возврата в точку $\psi_0 = \pi/3$, серая – $\psi_0 = 2\pi/3$. b–Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при глобальном подходе в системе (1) при $b = 0.001$, $\Omega = 1.598233989$. Разрушение “Лестницы” начинается со ступеньки с числом $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle = 13$.

Рассмотрим зависимость $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$, рассчитанную с помощью глобального подхода (Рис. 1b). Из графика видно, что лестница разрушается начиная со ступеньки с $\langle\tau_{\inf}\rangle = 13$. Как известно, значение числа вращения изменяется в зависимости от рассматриваемой окружности. В связи с тем, что $b \neq 0$, математический маятник приобретает небольшую нелинейность, что делает невозможным точное задание числа вращения. По нашему мнению, существует некоторое критическое значение $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$, при котором происходит разрушение "Лестницы Фибоначчи". Далее рассмотрим случай малого параметра $b = 10^{-5}$. Из теории предполагается, что чем меньше значение параметра b, тем меньше нелинейность системы, что приводит к возможности более точного задания числа вращения.

На Рис. 2 представлены результаты, подтверждающие изложенное выше предположение. Как видно из Рис. 2,b разрушение лестницы Фибоначчи наступает позже, начиная со ступеньки $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle = 34$, что происходит благодаря уменьшению влияния нелинейности.

Также на Рис. 2 приведены результаты расчета времен возврата для двух случаев: при глобальном и локальном подходах. Из рисунка видно, что для обоих случаев характерно разрушение лестницы при бо́льшем значении $\tau_{\inf} = 34$. Из представленных графиков видно, что "лестница Фибоначчи" начинает разрушаться только в случае, когда ε становится меньше некоторого критического значения ε_{cr}. Следовательно, при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ динамика точек на окружностях схожа с динамикой отображения окружности, а именно, при малой амплитуде внешнего воздействия зависимость $\tau_{\inf}(\varepsilon)$ соответствует "Лестнице Фибоначчи". При $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ лестница разрушается. Увеличение амплитуды внешнего воздействия b приводит к сдвигу порога разрушения лестницы ε_{cr} в сторону больших ε. В области существования "Лестницы Фибоначчи" можно говорить о равенстве размерности Афраймовича-Песина единице, так как при аппроксимации "лестницы" прямой модуль коэффициента угла наклона, а значит и АП-размерность, равен единице.

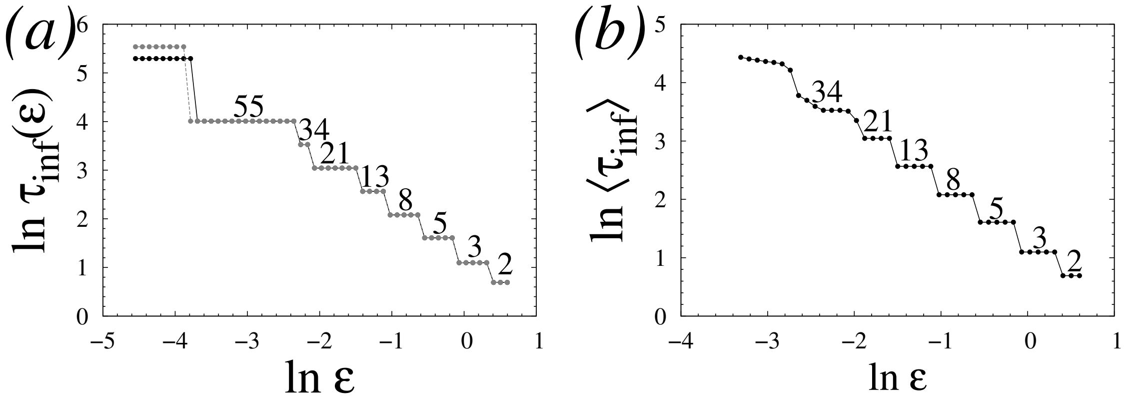

Рис. 2: (a) – Зависимость минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при локальном подходе в системе (1) при $b = 0.00001$, $\Omega = 1.598033989$ и начальных условиях $x_0 = 0.44$, $y_0 = 0$. Черная кривая соответствует окрестности возврата в точку $\psi_0 = \pi/3$, серая – $\psi_0 = 2\pi/3$. (b) – Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности при глобальном подходе в системе (1) при $b = 0.00001$, $\Omega = 1.598033989$. Разрушение “Лестницы” начинается со ступеньки с числом $\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle = 34$.

Случай больших амплитуд. При параметрах $b = 0.1$, $\Omega = 2\pi/3$ и начальных условиях $x_0 = -2.1$, $y_0 = -0.6$ система (1) демонстрирует появление островов устойчивости. На Рис. 3,a показан пример одного из таких множеств, позволяющий рассмотреть статистику возвратов Пуанкаре.

Выбор данного параметра Ω соответствует рациональному отношению внешней частоты и собственной: 2 : 3. Следствием является образование неподвижных периодических точек движения. В области этих точек имеется множество инвариантных кривых (см. Рис. **??**,c). На Рис. 3,a показан пример одного из таких множеств, позволяющий рассмотреть статистику возвратов Пуанкаре.

На Рис. 3,b показана соответствующая зависимость $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$. Зависимость $\langle\tau_{\inf}\rangle$ от размера окрестности позволяет говорить о возможности ее аппроксимирования прямой: $\ln\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle = -\ln\varepsilon + C$. Стоит отметить, что значения $\langle\tau_{\inf}\rangle$ остаются практически неизменными, начиная с некоторого $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$. Причиной этому может быть высокая степень нелинейности при $b = 0.1$.

Таким образом, при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ зависимость $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$ представляет собой прямую линию с наклоном -1. Таким образом, можно сделать вывод о равенстве АП-размерности единице.

При условии $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ можно увидеть, что значения зависимости $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$ остаются почти неизменными, а нелинейность делает невозможным расчет размерности Афраймовича-Песина.

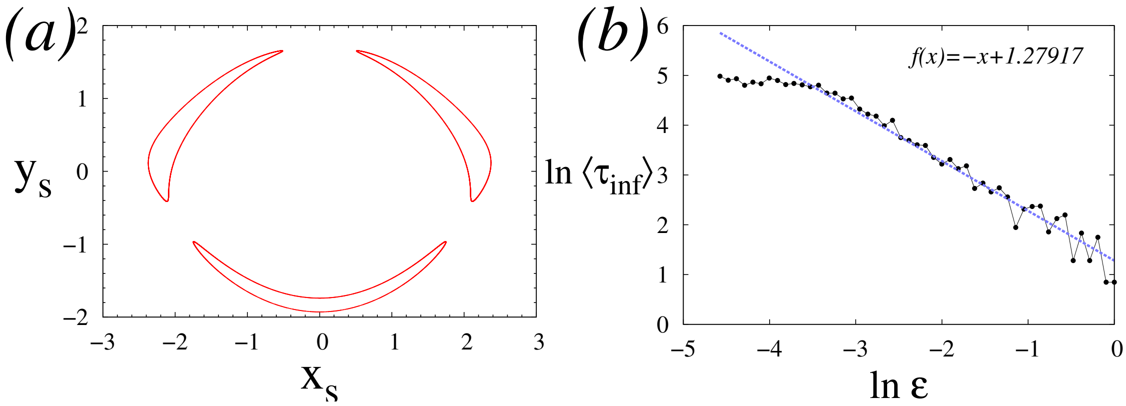

Рис. 3: (a) – Множество, полученное в стробоскопическом сечении системы (1) при $b = 0.1$, начальных условиях $x_0 = -2.1$, $y_0 = -0.6$ и частоте внешнего воздействия $\Omega = 2\pi/3$. (b) – Зависимость $\ln\langle\tau_{\rm inf}(\ln\varepsilon)\rangle$.

Заключение

В работе представлены результаты статистического анализа множеств, полученных в стробоскопическом сечении гамильтоновой системы – математического маятника под внешним гармоническим воздействием. Также были рассмотрены два основных типа множеств гамильтоновой системы: окружности и резонансные торы. В первом случае исследование статистики времен возврата в рассматриваемое множество показало, что зависимость $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$ в гамильтоновых системах можно разделить на два участка: при $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$, где ε_{cr} есть некоторое критическое значение, зависимость $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$ схожа с аналогичной зависимостью, полученной в отображении окружности при таком же числе вращения, лестницей Фибоначчи. Для малых $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ лестница разрушается. Отметим, что уменьшение амплитуды внешнего воздействия приводит к сдвигу критического значения ε_{cr} в сторону меньших ε. Исследование статистики времен возврата в резонансных торах показало, что зависимость $\langle\tau_{\inf}(\varepsilon)\rangle$ также можно разделить на два участка, разделенных критическим значением ε_{cr}. Причем для $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ зависимость $\ln\langle\tau_{\inf}(\ln\varepsilon)\rangle$ можно аппроксимировать прямой линией с коэффициентом угла наклона -1, что говорит о том, что на этом участке размерность Афраймовича-Песина есть $\alpha_c = 1$. В случае же $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ значения $\langle\tau_{\inf}\rangle$ практически не изменяются, что говорит о невозможности расчета АП-размерности в области малых ε.

По результатам проведенных исследований была опубликована статья: Н.И. Семенова, Т.И. Галактионова, В.С. Анищенко. Возвраты Пуанкаре и Размерность Афраймовича-Песина в Неавтономном Консервативном Осцилляторе // Известия Саратовского университета. Новая серия. – 2016.