Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и
информационных технологий

Разработка алгоритма определения функциональной сложности взаиморасположения цифр в начальных отрезках последовательностей определяющих иррациональные числа π, e, φ, ζ_3, F_n, δ, √2, √3, √5

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Каценеленбоген Артёма Александровича

Научный руководитель
д.т.н., профессор ____________________ В.А. Твердохлебов
дата, подпись

Заведующий кафедрой
к. ф.-м.н., доцент ____________________ Л.Б. Тяпаев
дата, подпись

Саратов 2016 год

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность: Одной из характеристик сложности структуры числовых последовательностей является характеристика функциональных зависимостей элемента последовательности от предшествующих в последовательности элементов. В наиболее развитой форме такая функциональная зависимость элементов исследовалась при разработке методов интерполяции и экстраполяции. Разработаны десятки методов интерполяции и экстраполяции:

- Лагранжа
- Ньютона
- Гаусса
- Наименьших квадратов и т.д.

Необходимость в таких методах объясняется запросами теории и практики при пополнении частично-заданных графиков новыми дополнительными точками. В этих случаях функциональная зависимость новых точек объединяется по известным точкам как внутри известных точек (интерполяция) так и за пределами известных точек (экстраполяция).

В работе [1] представлен спектр Ω числовых показателей рекуррентного определения полностью заданных последовательностей.

В бакалаврской работе поставлена задача:

- Изучить метод оценки сложности структуры функциональных зависимостей, взаиморасположение элементов последовательности по числовым показателям рекуррентного определения последовательности, представленным в спектре, разработанным и изложенным в работах [2-4].

- Для фундаментальных числовых последовательностей ξ_1-ξ_9 определить числовые показатели рекуррентных определений последовательностей на уровнях Ω_0 и Ω_1.

- Сравнить по сложности функциональных зависимостей элементов выбранных последовательностей.

- Для получившихся числовых показателей рекуррентных определений последовательностей разработать алгоритм, составить программу и оценить выбранную последовательность по сложности.

- Определить для рассмотренных последовательностей, сохраняется ли отношение сложностей последовательностей в зависимости от длины последовательности.

Бакалаврская работа состоит из введения, четырёх глав и одной под главы, заключения, списка использованных источников и приложения.

В первой главе поясняется структура спектра числовых показателей рекуррентного определения последовательностей.

Во второй главе описан метод оценки сложности алгоритмов и реализаций алгоритмов по показателям спектра рекуррентного определения последовательностей.

В третьей главе показана блок-схема алгоритма вычисления сложности числовой последовательности.

В четвёртой главе проведён вычислительный эксперимент и показаны результаты работы программы. В под главе один четвёртой главы показано отношение последовательностей по сложности на уровнях спектра Ω_0 и Ω_1 при различной длине отрезков в виде диаграмм.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Структура спектра числовых показателей рекуррентного определения последовательностей. В качестве основной характеристики свойств последовательности разработан и предлагается спектр $\Omega(\xi)$ динамических параметров, представляющих правила построения последовательности с использованием рекуррентных форм различных порядков. Для этого рассматриваемой последовательности

$$\xi = \langle u(1), u(2), \ldots, u(t), \ldots \rangle \qquad (1.1)$$

элементов из конечного множества U сопоставляются рекуррентные формы $F(z_1, z_2, \ldots, z_m) = z_{m+1}$, у которых $z_i, 1 \le i \le m+1$, принимают значения из множества U, и которые определяют части или сразу всю последовательность ξ.

Определение последовательности рекуррентной формой F (или последовательностью рекуррентных форм) реализуется на основе совмещения переменных рекуррентной формы с элементами последовательности ξ по правилу: для любого t, $t > m$ (или t принадлежит рассматриваемому интервалу целых положительных чисел)

$$F(u(t-m), u(t-m+1), \ldots, u(t-1)) = u(t). \qquad (1.2)$$

По предположению независимые и зависимые переменные рекуррентных форм определены на конечном множестве U, то есть, рекуррентной форме F соответствует конечное отображение вида F: $U^m \to U$. Это позволяет эффективно задавать рекуррентные формы, конечные семейства рекуррентных форм и правила их применения при определении последовательностей.

Спектр $\Omega(\xi)$ для последовательности ξ имеет 5 уровней: $\Omega(\xi) = (\Omega_0(\xi), \Omega_1(\xi), \Omega_2(\xi), \Omega_3(\xi), \Omega_4(\xi))$. В спектре числовыми значениями представлены порядки рекуррентных форм, длины отрезков последовательности, определяемые отдельными рекуррентными формами и количества смен рекуррентных форм.

По определению $\Omega_0(\xi) = m_0(\xi)$, где $m_0(\xi)$- наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей всю последовательность ξ. На уровне $\Omega_1(\xi)$ спектра $\Omega(\xi)$ расположено m_0 чисел ($m_0 \in N^+$), определяющих для порядков от 1 до m_0 размеры наибольших определяемых начальных отрезков последовательности ξ.

Уровень $\Omega_2(\xi)$ содержит m_0 чисел, показывающих, сколько раз для рассматриваемого порядка рекуррентных форм потребовалось заменять рекуррентные формы при определении последовательности ξ. На уровне $\Omega_3(\xi)$ каждое число смен рекуррентных форм, показанное на уровне $\Omega_2(\xi)$, заменено последовательностью чисел, представляющих длины отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами.

По построению спектр динамических показателей определения последовательности состоит из числовых значений:

- наименьшего порядка $m_0(\xi)$ рекуррентной формы определяющей всю последовательность ξ;

- набор наименьших длин $d^1(\xi)$, $d^2(\xi),\ldots,$ $d^{m_0}(\xi)$ префиксов последовательности ξ, задаваемых рекуррентными формами соответственно порядков $1, 2, \ldots, m_0$;

- набор чисел $r^1(\xi)$, $r^2(\xi),\ldots,$ $r^{m_0}(\xi)$ смен рекуррентных форм порядков $1, 2, \ldots, m_0$, задающих всю последовательность;

- набор наборов длин

$$d_1^1(\xi), d_2^1(\xi), \ldots, d^1_{r^1(\xi)+1}(\xi)$$

$d_1^2(\xi), d_2^2(\xi),\ldots, d_{r^2(\xi)+1}^2(\xi)$

…………………..

$d_1^{m_0}(\xi) = |\xi|$

отрезков последовательности ξ, где $d_j^m(\xi)$ - длина j-го отрезка в определении рекуррентной формой порядка m последовательности ξ.

Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^\nu$ наименьший порядок рекуррентной формы, определяющей последовательность $\bar{\xi}$, будем обозначать $m_0(\bar{\xi})$. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^\nu$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le m_0(\bar{\xi})$, наибольшую длину начального отрезка последовательности $\bar{\xi}$, определяемого рекуррентной формой порядка m, будем обозначать $d^m(\bar{\xi})$. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^\nu$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le |\bar{\xi}| - 1$, число смен рекуррентных форм порядка m, требующихся при определении последовательности $\bar{\xi}$, будем обозначать $r^m(\bar{\xi})$. Для любой последовательности $\bar{\xi} \in U^\nu$ и $m \in N^+$, где $1 \le m \le m_0(\bar{\xi})$ и j, где $1 \le j \le r^m(\bar{\xi})$ длину j - го отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ будем обозначать $d_j^m(\bar{\xi})$.

Используя введенные обозначения определим спектр параметров, характеризующих последовательность, как следующую структуру:

-$\Omega_0(\bar{\xi}) = \langle m_0(\bar{\xi}) \rangle$; $\Omega_1(\bar{\xi}) = \langle d^1(\bar{\xi}), d^2(\bar{\xi}), \ldots, d^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$;

-$\Omega_2(\bar{\xi}) = \langle r^1(\bar{\xi}), r^2(\bar{\xi}), \ldots, r^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$; $\Omega_3(\bar{\xi}) = \langle \Omega_3^1(\bar{\xi}), \Omega_3^2(\bar{\xi}), \ldots, \Omega_3^\alpha(\bar{\xi}) \rangle$,

где $\alpha = m_0(\bar{\xi})$ и $\Omega_3^j(\bar{\xi}) = \langle d_1^j(\bar{\xi}), d_2^j(\bar{\xi}), \ldots, d_{n_j}^j(\bar{\xi}) \rangle$ (n_j – номер последнего отрезка в определении последовательности $\bar{\xi}$ как последовательности отрезков, определяемых отдельными рекуррентными формами порядка j);

- $\Omega_4(\bar{\xi}) = \Theta(\Omega_3(\bar{\xi}))$, где Θ - оператор замены в $\Omega_3(\bar{\xi})$ величин длин отрезков весами использованных рекуррентных форм для определения отрезков.

Четвёртый уровень $\Omega_4(\bar{\xi})$ спектра $\Omega(\bar{\xi})$ к характеристике последовательности $\bar{\xi}$ по количеству изменений правил, определяющих взаиморасположение элементов в последовательности, и величинам областей действия правил, представленной на уровнях $\Omega_1(\bar{\xi})$ - $\Omega_3(\bar{\xi})$, добавляет оценки сложности правил и величины области использования правил. В достаточно общем случае можно вводить веса правил (рекуррентных форм) и веса реализации правил, используемых при определении отрезка. Например, для каждого шага применения рекуррентной формы $F(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0) = z_{m+1}^0$, то есть, для набора $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0)$ задается вес $\Theta(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_m^0)$ в числовой форме и сумма весов всех шагов применения рекуррентной формы для последовательности полагается весом последовательности.

Первые четыре уровня $\Omega_0(\xi)$, $\Omega_1(\xi)$, $\Omega_2(\xi)$ и $\Omega_3(\xi)$ спектра $\Omega(\xi)$ характеризуют алгоритмические свойства определения последовательности ξ и её строение, так как рекуррентные формы являются правилами построения порядка следования элементов. Эти отдельные, базовые, правила сменяют одно другое по общему критерию достижения границы применимости рекуррентной формы.

Простейшая формула, определяющая числовое значение оценки сложности использованной рекуррентной формы, имеет вид

$$\theta = \frac{m_0 \cdot k}{n^{m_0 - 1}}, \qquad (1.3)$$

где k – число знаков в последовательности, порожденных применением рекуррентной формы F, а n - мощность алфавита. Эта оценка θ в варианте $\Omega_0 = < m_0 >$ использована на 0-ом уровне спектра Ω, что упрощает и огрубляет получаемую оценку сложности последовательности. Например, по формуле (1.3) с использованием нулевого уровня Ω_0 спектра Ω последовательности, задающие приближения длины 80 величин

π, $\sqrt{\frac{\pi \cdot e}{2}}$, $\sqrt{10} - \pi$ (см.таблица 1.1), получают одинаковые оценки сложности.

Кроме этого, последовательности, различающиеся только взаимно-однозначным преобразованием элементов, попадают в один и тот же класс эквивалентности по показателям уровней $\Omega_0 - \Omega_3$ спектра Ω.

Таблица 1.1.

π = 3,1,4,1,5,9,2,6,5,3,5,8,9,7,9,3,2,3,8,4,6,2,6,4,3,3,8,3,2,7,9,5,0,2,8,8,4,1,9,7,1,6,9,3,9,9,3,7,5,1,0,5,8,2,0,9,7,4,9,4,4,5,9,2,3,0,7,8,1,6,4,0,6,2,8,6,2,0,8,9,9,8,6,2,8,0,3,4,8,2,5,3,4,2,1,1,7,0,6,7,9,8,2,1,4,
$\sqrt{\frac{\pi \cdot e}{2}}$ = 2,0,6,6,3,6,5,6,7,7,0,6,1,2,4,6,4,6,9,2,3,4,6,9,5,9,4,2,1,4,9,9,2,6,3,2,4,7,2,2,7,6,0,9,5,8,4,9,5,6,5,4,2,2,5,7,7,8,3,2,5,6,2,6,8,9,8,9,7,8,9,6,4,2,5,6,7,0,8,5,1,6,1,8,1,2,6,0,1,8,1,2,2,7,7,3,3,1,4,1,
$\sqrt{10} - \pi$ = 0,2,0,6,8,5,0,0,6,5,7,8,5,8,6,0,9,3,5,3,6,2,5,0,1,6,1,1,5,3,2,1,5,6,4,9,5,2,2,3,8,5,7,3,9,9,5,0,1,1,1,0,0,5,8,8,2,5,6,0,2,6,0,4,8,4,7,7,8,0,3,2,3,5,3,0,2,9,2,2,2,7,1,6,2,1,3,2,8,3,0,3,7,1,8,3,2,2,7,2,0,5,1,9,9,

Например, последовательности, задающие приближения длины 100 величин 1/27, 1/37, $2^n \bmod 7$, $7^n \bmod 9$, представленных в таблице 1.2. (В таблице 1.2 числам 1/27, 1/37, $2^n \bmod 7$, $7^n \bmod 9$ сопоставлены последовательности без первого 0).

Таблица 1.2.

1/27=**0,** 037037037037037037037037037037037037037037037037037037037037037037037037 037037037037037037037037037
1/37=**0,** 027027027027027027027027027027027027027027027027027027027027027027027027 027027027027027027027027027
2^n mod 7=**0,** 1241241241241241241241241241241241241241241241241241241241241241241 24124124124124124124124124124124
7^n mod 9=**0,** 1741741741741741741741741741741741741741741741741741741741741741741 74174174174174174174174174174174

Для исследования некоторых задач, например, задач оценки сложности, классификации или распознавания последовательностей, в спектр включён четвёртый уровень $\Omega_4(\xi)$. На этом уровне рассматриваемая последовательность характеризуется с использованием весов, придаваемых отдельным рекуррентным формам и определяемым этими формами частей последовательности. На уровне $\Omega_{i+1}(\xi)$, где $0 < i \leq 3$, содержится информация, дополняющая информацию из уровня $\Omega_i(\xi)$. Все последовательности, отличающиеся взаимно-однозначным преобразованием элементов базового множества, имеют один и тот же спектр.

Автоматное отображение ρ'_{s_0} вида (1.1) является фазовой картиной (фазовым портретом), в которой представлены все возможные фазовые траектории. Это свойство перенесено на геометрические образы автоматов, то есть, все варианты конкретного функционирования автомата представлены сечениями его геометрического образа. Это означает, что в свойствах исследуемых последовательностей представлены свойства как фазовых картин, так и отдельных фазовых траекторий.

Существенным свойством геометрических образов законов функционирования автоматов является то, что фазовые картины и отдельные фазовые траектории представлены в единой и общей математической форме – последовательностями и графиками. Если такие последовательности заданы, например, алгебраическими уравнениями, то фазовая картина и фазовые траектории на любом удаленном от начала функционирования интервале времени вычисляются без рекурсивных построений.

Отношение последовательностей по сложности на уровнях спектра Ω_0 и Ω_1 при различной длине отрезков. В работе исследовались последовательности π, e, φ, ζ_3, F_n, δ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ниже приведены результаты исследования и сравнения начальных отрезков последовательностей длины 30, 50, 100, 200 символов после запятой по сложности на уровнях спектра Ω_0 и Ω_1.

На рисунке 1 показано сравнение последовательностей по спектру Ω_0 для 30, 50, 100, 200 символов.

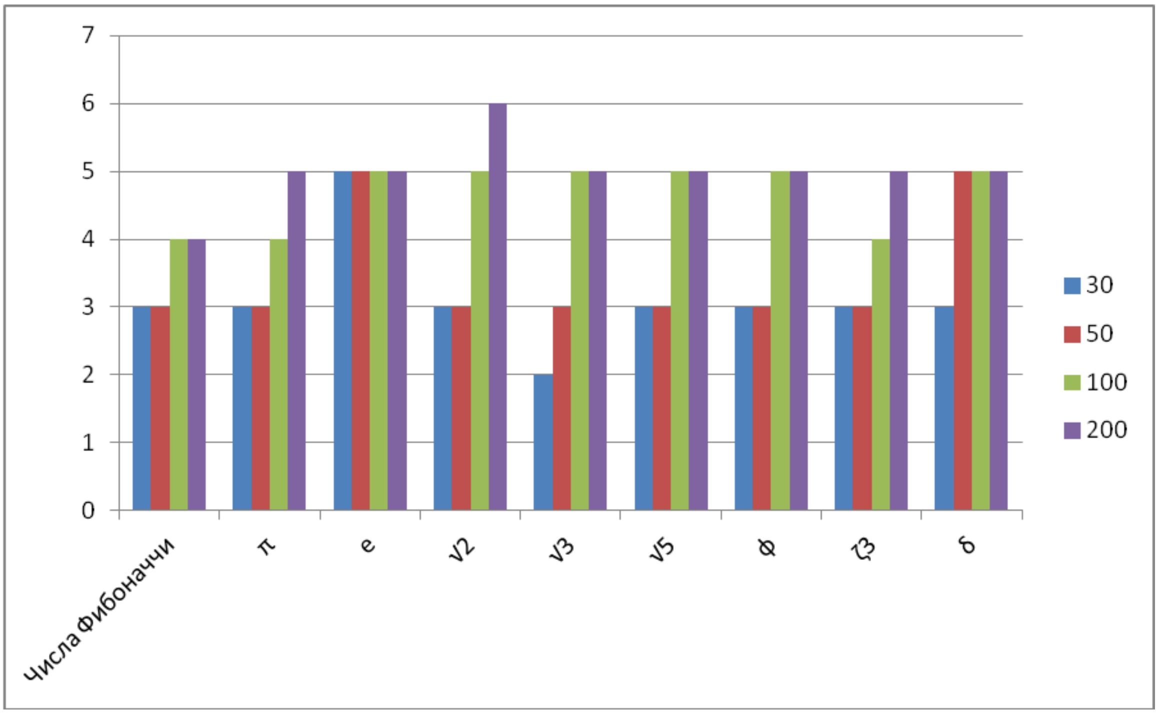

Рисунок 1.

На рисунке 2 показано сравнение последовательностей по спектру Ω_1 для 30 символов.

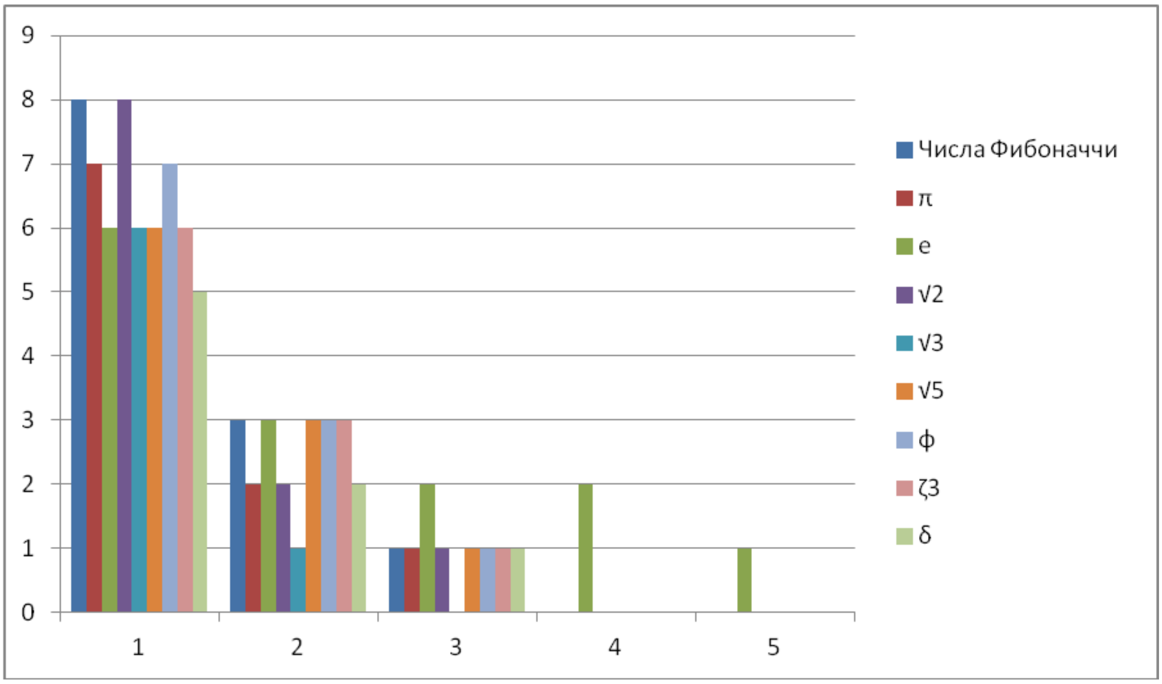

Рисунок 2.

На рисунке 3 показано сравнение последовательностей по спектру Ω_1 для 50 символов.

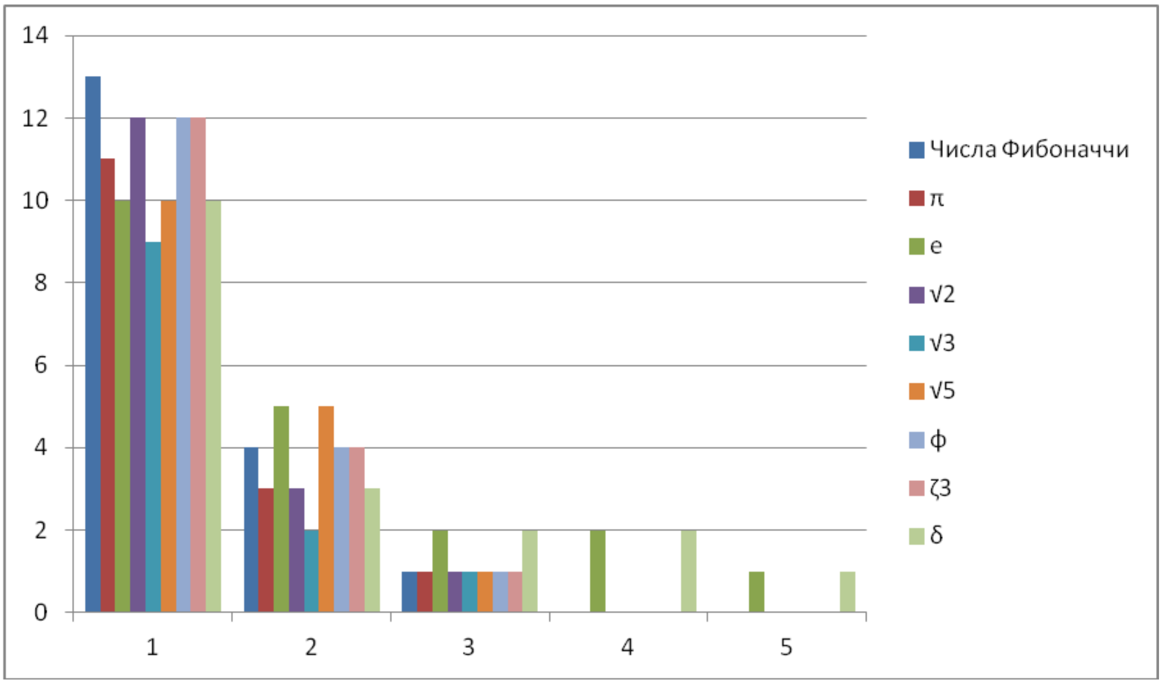

Рисунок 3.

На рисунке 4 показано сравнение последовательностей по спектру Ω_1 для 100 символов.

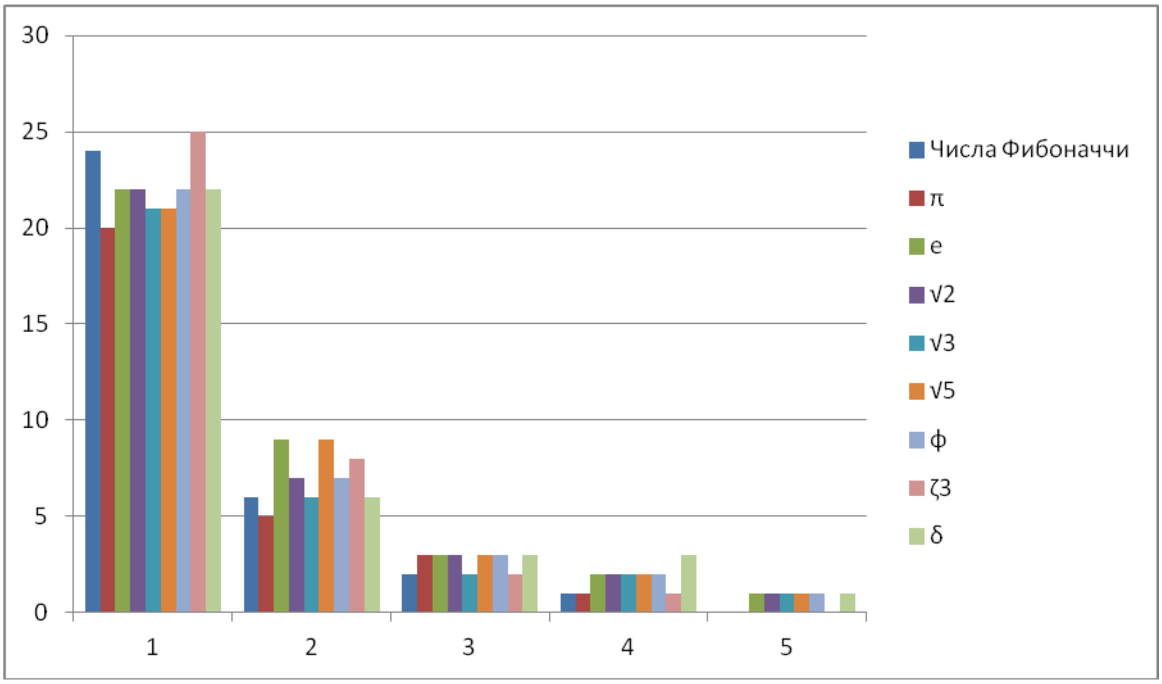

Рисунок 4.

На рисунке 5 показано сравнение последовательностей по спектру Ω_1 для 200 символов.

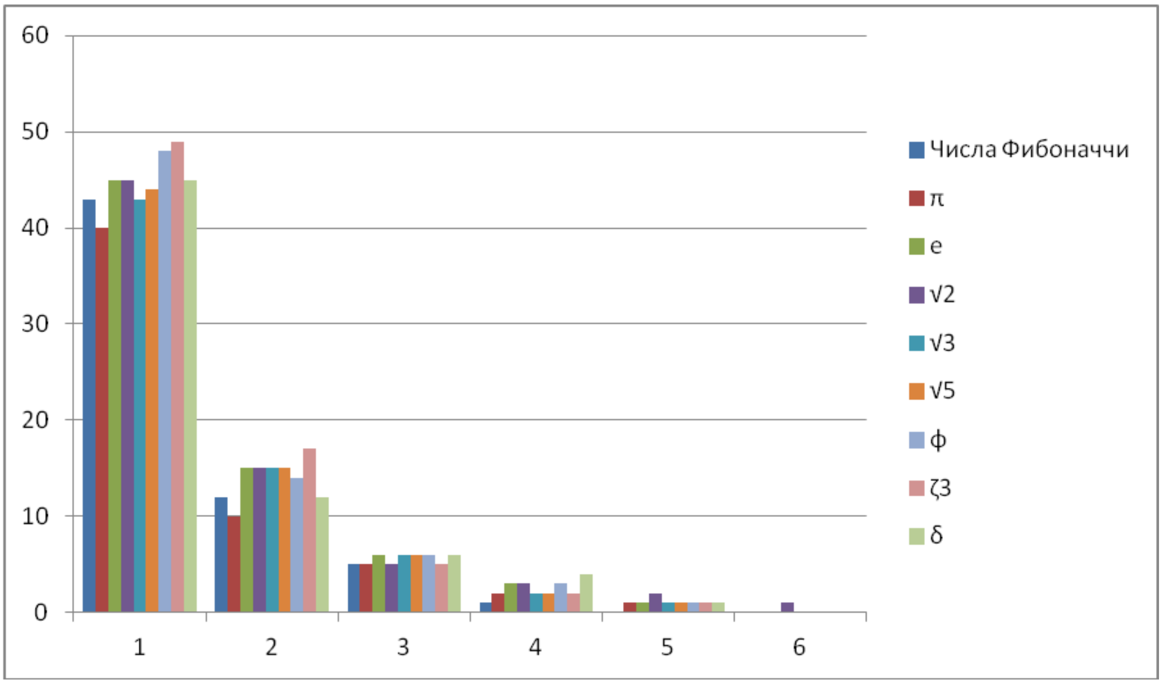

Рисунок 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе все поставленные задачи решены. По методу получения числовых характеристик разработан алгоритм, составлена программа и проведён вычислительный эксперимент. Конкретными данными вычислительного эксперимента являются фундаментальные числовые последовательности ξ_1-ξ_9. Используя данные конкретного вычислительного эксперимента можно сказать, что сложность последовательности может колебаться в зависимости от её длины. В данном примере последовательность ξ_1 является более простой по отношению к восьми другим последовательностям по уровню спектра Ω_0 при длине в 200 символов. А при длине последовательности в 50 символов сложность по уровню спектра Ω_0 одинакова у ξ_1-ξ_2 и ξ_4-ξ_8 и равна 3, а также у ξ_3 и ξ_9 и равна 5.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Твердохлебов В.А., Епифанов А.С. Представление автоматных отображений геометрическими структурами: Монография. – Саратов: ООО Издательский Центр «Наука», 2013. – С. 40-43.

2 Интерполяция и рекуррентные модели в техническом диагностировании больших систем / В. А. Твердохлебов // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: материалы Междунар. конф. / редкол.: А. Ф. Резчиков (отв. ред.) [и др.]. - Саратов: [Изд. СГТУ], 2006. - С. 68-80 : рис. - Библиогр.: с. 79-80 (9 назв.).

3 Твердохлебов В.А. Спектр общих характеристик для последовательностей, геометрических фигур и автоматов. / Тезисы докладов на Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии», Изд-во Сарат. ун-та, 2007. С.118-119.

4 Твердохлебов В. А. Спектры геометрических образов автоматов и оценка сложности функционирования. // Материалы Международной конференции "Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении". –Саратов – 2007 С.21-27

5 The On-Line Encyclopedia [Электронный ресурс]/The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) URL: www.oeis.org (дата обращения 12.11.2015). Загл. с экрана. Яз. англ.