Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

Разработка информационной технологии на основе генетического алгоритма для нахождения оптимального инвестиционного портфеля с ограничением на кардинальность

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 421 группы

направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Куропатовой Анастасии Андреевны

Научный руководитель
к. ф.-м.н., доцент ______________ И.Д. Сагаева

Заведующий кафедрой
к. ф.-м.н., доцент ______________ Л.Б. Тяпаев

Саратов 2016 год

Введение. Современный инвестор сталкивается с рядом серьезных вопросов: сколько из имеющихся средств вкладывать, в какие именно ценные бумаги инвестировать и как оценить рискованность своих вложений.

Существующие теории оптимизации дают возможность описать множество, так называемых эффективных портфелей и далее выбрать портфель с максимальным доходом при ограничениях на риск или минимизировать риск портфеля при заданной доходности. Идеальной для инвестора является стратегия формирования портфеля максимальной доходности и минимального риска. Но не всегда существуют эффективные подходы к решению проблемы оптимизации портфеля по двум этим критериям. Таким образом, проблема поиска оптимального решения задачи формирования инвестиционного портфеля ценных бумаг остается актуальной.

В силу того, что на рынке предлагается огромное количество активов, на число активов накладывается ограничение – кардинальность числа активов. Для решения задачи в работе используется генетический алгоритм.

Целью выпускной квалификационной работы является программная реализация генетического алгоритма на примере задачи нахождения оптимальной структуры инвестиционного портфеля.

Для достижения цели были выделены следующие подзадачи:

- изучение материала по теории портфельного инвестирования;
- рассмотрение основных математических моделей инвестиционного портфеля;
- изучение генетических алгоритмов;
- написание программной реализации с использованием методов Марковица, Тобина, Шарпа.

В первой главе рассматриваются основные принципы инвестирования в ценные бумаги, проблемы выбора инвестиционного портфеля и основные характеристики ценных бумаг.

Во второй главе сформулированы модели выбора оптимального инвестиционного портфеля. Рассмотрены такие математические модели как модель Марковица, Шарпа и Тобина.

В третьей главе вводится понятие ограничения на кардинальность для оптимального инвестиционного портфеля.

Четвертая глава посвящена генетическим алгоритмам. Генетические алгоритмы относятся к эвристическим методам и основаны на эволюционных принципах естественного отбора и генетики.

В пятой главе рассматривается применение генетических алгоритмов, для нахождения оптимальной структуры инвестиционного портфеля с ограничением на кардинальность.

Шестая глава описывает практическую реализацию генетического алгоритма на примере нахождения оптимального инвестиционного портфеля.

В седьмой главе описываются вычислительные эксперименты.

В заключении приводятся результаты экспериментов и сравнительный анализ трех вышеописанных портфельных моделей.

1 Общие понятия. Инвестиции – это вложение свободных денежных средств в различные активы с целью получить прибыль.

Акция – это эмиссионная ценная бумага, закрепляющая права ее владельца (акционера) на получение части прибыли акционерного общества в виде дивидендов, на участие в управлении акционерным обществом и на часть имущества, остающегося после его ликвидации.

Под портфелем мы будем понимать набор инвестиций в ценные бумаги, обращающиеся на финансовом рынке[5].

Доходность ценной бумаги, как правило, определяется за период владения. Доходность r определяется по формуле:

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0}$$

где P_0 - цена акции в начале периода, а P_1 - цена акции в конце периода.

Можно рассматривать доходность как случайную величину, так как инвестор, приобретая ценную бумагу в начале периода, не знает чему будет равна ее доходность к концу периода.

Используя математическое ожидания можно оценить будущее, ожидаемое значение доходности i-той ценной бумаги. Математическое ожидание вычисляется по формуле: $\overline{m_i} = E[\mathrm{r}_i] = \sum_{t=1}^{N} r_{it} P_t$

где через r_{it} $(1 \le t \le N)$ обозначаются значения доходности i-той ценной бумаги в t-ом состоянии экономики, а P_t – вероятность данного состояния экономики.

Рассмотрим портфель из *n* активов. Пусть x_i - доля общих вложений, инвестированных в *i*-ю ценную бумагу. Все доли являются неслучайными величинами, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Ожидаемая доходность портфеля, с учетом правил вычисления математического ожидания, равна:

$$\overline{m}_p = E[r_p] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i$$

где через r_i обозначаются значения доходности i-той ценной бумаги, E[]– обозначает операцию вычисления математического ожидания

Дисперсию портфеля определяет математическое ожидание квадрата этого отклонения:

$$V_p = E[(r_p - \overline{m}_p)^2] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - \overline{m}_j)] =$$
$$= E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij}$$

где $V_{ij} = E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)]$- ковариация доходностей i-го и j-го активов, показывающая линейность связи доходностей ценных бумаг между собой. В случае если $i=j$, то ковариация превращается в дисперсию доходности i-той ценной бумаги[7].

2 Модели оптимального портфельного инвестирования.

В модели Марковица доля вложений в рисковую ценную бумагу j-го вида, обозначается через x_j, $(j = 1,..,n)$, где n показывает число различных видов бумаг в портфеле. С помощью формул для вычисления дисперсии и ожидаемой доходности портфеля, задача выбора оптимальной структуры рискового портфеля формулируется следующим образом: найти вектор $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, который минимизирует дисперсию портфеля [7]:

$$V_p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j,$$

при ограничениях

$$\overline{m}_p = \sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

В модели Тобина будем рассматривать портфель, который включает в себя как рисковые так и безрисковые ценные бумаги. Через x_0 обозначим долю безрисковых вложений с гарантированной доходностью r_0, через $X = (x_1, \ldots, x_n)^r$ - вектор долей вложений в рисковые активы, таким образом, задача выбора оптимальной структуры комбинированного портфеля, состоящего как из рискового актива n, так и из безрискового актива, формируется следующим образом: необходимо найти вектор X, который минимизирует дисперсию портфеля [1]:

$$V_p = X^T V X$$

и удовлетворяет ограничениям

$$m^T X + r_0 x_0 = \overline{m}_P$$

$$I^T X + x_0 = 1$$

Рыночная модель была предложена американским экономистом, лауреатом Нобелевской премии У.Шарпом в середине 60-х годов прошлого столетия.

Рассмотрим портфель ценных бумаг. Если обозначить через x_j – долю ценных бумаг j-го вида (j = 1,.., n) в портфеле, то доходность портфеля может быть вычислена по следующей формуле:

$$r_p = \sum_{j=1}^{N} x_j r_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j + r_I \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n} x_j \, \varepsilon_j = \alpha_p + \beta_p \cdot r_I + \varepsilon_p,$$

где

$$\alpha_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j \,, \beta_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j \text{ и } \varepsilon_p = \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j$$

То есть портфельные величины α_p, β_p и ε_p являются средневзвешенными суммами соответствующих коэффициентов.

Тогда ожидаемое значение доходности портфеля будет равно:

$$\overline{m}_p = E[r_p] = E[\alpha_p + \beta_p \cdot r_I + \varepsilon_p] = E[\alpha_p] + E[\beta_p \cdot r_I] + \sum_{j=1}^{n} x_j E[\varepsilon_j] = \alpha_p + \beta_p \cdot \overline{m}_I$$

Вычислим общий риск портфеля, предполагая, что случайные отклонения доходности ценных бумаг являются некоррелированными [2]:

$$\sigma_p^2 = V[r_p] = V[\alpha_p] + V[\beta_p \cdot r_I] + V[\varepsilon_p] = \beta_p^2 \cdot \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^{n} V[x_j \varepsilon_j] = \beta_p^2 \cdot \sigma_I^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2$$

где $\beta_p^2 = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j\right]^2$, $\beta_p^2 \cdot \sigma_I^2$- рыночный риск портфеля,

$\sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2\, \sigma_{\varepsilon j}^2$- собственный риск портфеля.

3 Задача оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность. Введение единственного ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования.

Задача выбора оптимальной структуры портфеля с ограничениями на кардинальность для модели Марковица формулируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля[5]:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \sum_{j \in S(\delta)} V_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \overline{m}_i x_i = \overline{m}_p, \qquad \sum_{i \in S(\delta)} x_i = 1.$$

Для модели Тобина требуется найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \sum_{j \in S(\delta)} V_{ij} x_i x_j$$

при ограничениях:

$$\sum_{i \in S(\delta)} \overline{m}_i x_i + r_0 x_0 = \overline{m}_p, \qquad \sum_{i \in S(\delta)} x_i + x_0 = 1.$$

Для модели Шарпа требуется найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = \left[\sum_{j \in S(\delta)} x_j \beta_j \right]^2 \sigma_I^2 + \sum_{j \in S(\delta)} x_j^2 \sigma_{\varepsilon j}^2$$

при ограничениях:

$$\sum_{j \in S(\delta)} x_j \overline{m}_j = m_p, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

4 Генетические алгоритмы Генетические алгоритмы представляют собой адаптивные методы поиска, которые, как правило, используются для решения задач оптимизации. Они являются поисковыми механизмами, основанными на эволюционных принципах естественного отбора и генетики.

Генетический алгоритм использует механизмы естественной эволюции, основанные на трех принципах: фитнесс-функция, скрещивание и мутация. Блок-схема алгоритма представлена на рисунке 1.

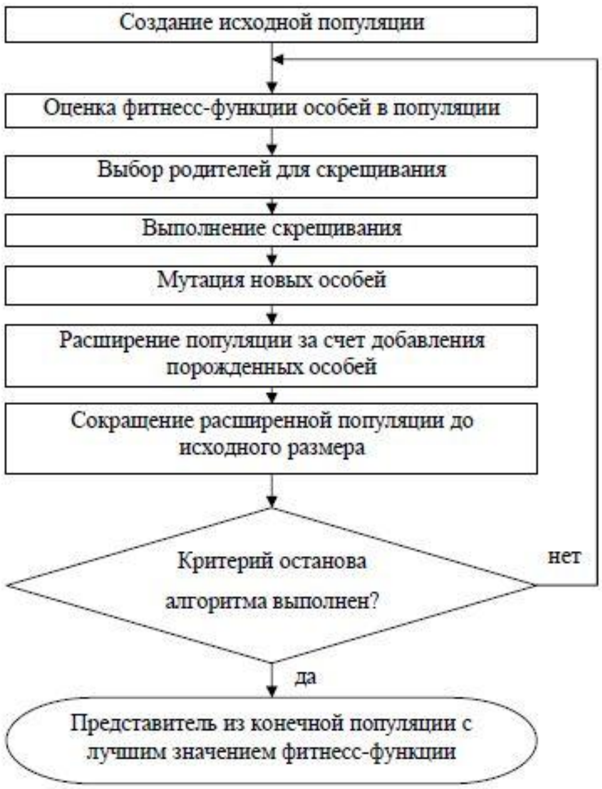

Рисунок 1 –Блок-схема генетического алгоритма.

Для использования в генетическом алгоритме, необходимо представлять каждый признак в некоторой подходящей форме. Как правило, для представления генотипа объекта применяются строки состоящие из 0 и 1.

Но обычный двоичный код не совсем подходит для решения данной задачи, так как мутация одного бита может привести к серьезным изменениям, сразу уводящим решение в другую область. Поэтому для кодирования признаков применяется код Грея.

Основными генетическими операторами в алгоритме являются:

Отбор – это первая генетическая операция, осуществляемая над популяцией. В результате селекции должны быть отобраны хромосомы, которые будут участвовать в процессе генерации новой популяции (популяции потомков). Селекция происходит на основании оценок пригодности хромосом. В итоге возникает промежуточная популяция.

Скрещивание выполняется в целях комбинирования и смешения признаков родительской популяции в популяции потомков.

Мутация небольшого количества генов в популяции потомков призвана сообщить потомкам новые признаки, которые могли отсутствовать в родительской популяции[9].

5 Генетический алгоритм для решения задачи оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность

Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования, поскольку для такого типа задач трудно найти оптимальное решение, многие трейдеры используют эвристики[6].

Обозначим через $P_{min}(\delta)$ минимальное значение целевой функции одной из задач формирования оптимального портфеля – Марковица, Тобина, Шарпа.

Возьмем $\overline{m}_p \in [\overline{m}_{min}, \overline{m}_{max}]$, где $\overline{m}_{min}$ – минимальное, а $\overline{m}_{max}$ – максимальное значение ожидаемых доходностей активов.

Работа генетического алгоритма состоит в выполнении следующих шагов[8]:

1. Кодирование. Используется *двоичное кодирование*. Популяция имеет фиксированный размер $P = s^2$ портфелей, s есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) являются наборы $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Delta_n(K)$, т.е. портфель состоит из n генов, каждый из которых представим битом. Если он равен единице, то актив, соответствующий номеру бита, присутствует в портфеле, в противном случае - отсутствует.

2. Генерация начальной популяции. Она происходит путем генерации P элементов случайным образом. Для гарантированного решения задачи $P(\delta)$ необходимо, чтобы портфель включал в себя часть активов, имеющих доходность, более высокую, чем $\overline{m}_p$, так и часть активов с доходностью меньшей, чем $\overline{m}_p$.

3. Отбор. Используется *отбор на основе усечения*. Для каждого элемента δ текущей i-ой популяции решается оптимизационная задача $P(\delta)$ и находится соответствующее значение $P_{min}(\delta)$. Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые $2s$ элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т.е. выбираются $2s \ll P$ элементов текущей i-й популяции с наименьшим значением $P_{min}(\delta)$. Через A_i обозначается множество особей, полученных в результате отбора на шаге i.

4. *Скрещивание*. Используется особый оператор скрещивания, при котором каждой паре элементов (ε, δ), $\varepsilon \in A_{1,i}$, $\delta \in A2, i$, ставится в соответствие элемент (потомок) γ по определенным правилам.

В результате скрещивания получаются $P = s^2$ потомков, которые потом полностью заменяют родителей, т.е в алгоритме используется *чистая замена*.

5. *Мутация*. Данный оператор является стандартным для генетического алгоритма и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью.

6 Практическая реализация генетического алгоритма на примере задачи нахождения оптимального инвестиционного портфеля.

Практическая часть представляет собой описание программы, которая предоставляет возможность решения задачи несколькими способами. В первой части описана реализация трех моделей портфельного инвестирования, описанных ранее. Во второй части - реализация генетического алгоритма для нахождения оптимальной структуры портфеля с ограничением на кардинальность.

Реализация теоретических моделей на практике предполагает производить подавляющее число вычислений при помощи матриц, все вычисления связанные с матрицами производились с помощью одномерных (матрица столбец или матрица строка) и многомерных массивов, которые удобно использовать при решении подобных задач.

Основа алгоритма заключена в методе, который устанавливает модель портфельного инвестирования. Данная модель предназначается для того, чтобы алгоритм оценивал значения целевой функции. Случайным образом генерируется начальная популяция из списка экземпляров, которые отвечают заданным требованиям доходности. После чего этот список подвергается сортировке. Отсортированный список передается в метод computeA1andA2 которые отбирает 2^s лучших портфелей, а потом разделяет этот список на две части A1 и A2 случайным образом. Эти списки портфелей в дальнейшем будут использоваться для скрещивания и получения новой популяции.

Далее в каждой итерации производится скрещивание всех элементов из A2 с теми элементами из списка A1. Для этого из каждого списка выбираются 2 родителя.

После этих действий производится мутация нового представителя. Когда структура портфеля сформирована, то для него с помощью модели вычисляются значения портфельного риска и значения долей входящих активов.

Заключение. В выпускной работе рассматривается актуальная задача портфельного инвестирования – задача выбора оптимальной структуры инвестиционного портфеля с ограничением на кардинальность числа активов.

Эффективные подходы к решению оптимизации портфеля по критерию доходность-риск не всегда существуют, поэтому при решении подобного рода задач хорошо работают эвристические методы. В работе используется один из таких методов – генетический алгоритм.

Результатом выпускной работы является разработка информационной технологии на основе генетического алгоритма для нахождения оптимального инвестиционного портфеля с ограничением на кардинальность числа активов. Разработанная программа была использована для проведения вычислительных экспериментов. Для эксперимента были взяты акции российских и американских компаний за 2010-2015 год. В результате можно сделать вывод, что модель Шарпа более предпочтительна, поскольку учитывает влияние рынка на доходность портфеля.

Программа написана на языке C#, в среде Visual Studio 2013. Для создания графического интерфейса использовалась среда Windows Forms.

Список использованных источников

1 Электронная экономико-правовая библиотека // Зачетка.рф[Электронный ресурс] . — Режим доступа: http://xn--80aatn3b3a4e.xn--p1ai/ (Дата обращения 12.11.2015)

2 Шапкин, А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, упавление, портфель инвестиций: Моография. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^{o}», 2003. 544с.

3 Сидоров, С.П. Модели оптимального портфельного инвестирования :учеб.-метод. пособие для студентов механико-математического факультета. / С.П.Сидоров, Е.А.Захарова, А.А.Хомченко, Н.П.Гришина. Саратов: Издательство Сарат. ун-та, 2015. 77 с. ил.

4 Риски инвестирования // Справочник для экономистов[Электронный ресурс]. – Электрон. журн. – 2012 — Режим доступа: http://www.catback.ru/articles/theory/invest/risk.htm (Дата обращения 20.02.2016)

5 Шарп, У. Инвестиции: пер. с англ./ У. Шарп, Г.Александер, Дж. Бэйли; пер. А.Н. Буренина, А.А. Васина. М.: ИНФРА-М, 2001. 1028с.

6 Максимова, В.Ф. Инвестиционный менеджмент: Учебно-практическое пособие. М. : Изд. Центр ЕАОИ, 2007. 214 с.

7 Бабешко, Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности: Учебное пособие. М.: Финакадемия, 2008. 192 с.

8 Goldberg, D. E. // Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. New-York: Addison Wesley, 1989.

9 Бураков, М.В. // Генетический алгоритм[Электронный ресурс]. – 2008 Режим доступа: http://www.studfiles.ru/preview/3652337/ (Дата обращения 07.03.2016)