

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Кафедра Математической экономики

Решение задачи Марковица методом проекции градиента

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 441 группы
направления 09.03.03 Прикладная информатика

механико-математического факультета

Кузнецовой Татьяны Николаевны

Научный руководитель
Д.ф.-м.н., профессор С.И. Дудов

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н., профессор С.И. Дудов

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В современных условиях инвесторы и коммерческие банки, владеют большим объемом свободных средств, которые возможно направить на инвестирование в различные виды деятельности или использовать на приобретение ценных бумаг, с последующим формированием портфеля, в связи с чем возрастает роль развития фондового рынка. Фондовый рынок представляет собой совокупность правил и механизмов, предназначенных для проведения операции по купле-продаже ценных бумаг и в данный момент это одна из наиболее привлекательных возможностей для инвестирования. Для достижения положительных результатов от вложения в доходные инструменты, обращающиеся на фондовом рынке, инвестору необходимо создать свой собственный инвестиционный портфель ценных бумаг.

Для этого стало востребованным решение прикладных задач инвестирования денежных средств в финансовые активы. В данной сфере исследовательской деятельности имеется достаточно развитая теоретическая база, известны десятки методов и подходов решения инвестиционных задач. Тем не менее, реализуя практическую часть, каждый раз требуется адаптировать и модифицировать ранее известные методы, особенно в условиях постоянно развивающегося финансового рынка.

В частности возникает необходимость дополнительного исследования математических методов и инструментальных средств для решения прикладных инвестиционных задач с ярко выраженными отличительными свойствами. К их числу относится задача формирования портфеля ценных бумаг. Данная задача представляет собой самостоятельное направление исследований, имеющих важное теоретическое и практическое значение по следующим причинам:

- 1) вопрос о выборе оптимальной модели оценки финансовых активов по-прежнему остается нерешенным, под влиянием финансовых рисков возрастает потребность использования не только научных, но и практических стратегий управления портфелем ценных бумаг. Также усиливается роль инструментов управления инвестиционным портфелем, которые позволили бы найти наиболее оптимальное соотношение между риском и доходностью, к числу

которых относятся численные методы. Реализация новых стратегий, позволяющих снизить риск при получении максимального экономического эффекта, также является одним из ключевых аспектов управления портфелем ценных бумаг.

2) отсутствие адекватных моделей и методов формирования портфеля ценных бумаг, учитывающих особенности проведения операции «короткая продажа» (продажа инвестором акций или других ценных бумаг, не находящихся в его собственности, с расчетом закрыть сделку в будущем, когда стоимость необходимых бумаг уменьшится). В связи с перечисленными причинами исследуемая в работе проблема является актуальной.

Цель исследования заключается в изучении составления наиболее эффективного портфеля ценных бумаг, обеспечивающего оптимальное соотношение риск-доходность, с последующим решением задачи Марковица методом проекции градиента.

Для достижения поставленной цели в рамках исследования **решаются следующие задачи:**

- анализ классической теории формирования портфеля ценных бумаг, основанной на модели Марковица;
- формулировка математической задачи формирования портфеля ценных бумаг;
- выбор метода решения задачи формирования портфеля ценных бумаг;
- проведение экономико-математического анализа модели, оценка риска, доходности, портфеля ценных бумаг;
- осуществление экспериментальных расчетов и анализ полученных результатов.

Объектом исследования является инвестиционная деятельность, связанная с формированием и управлением портфелем ценных бумаг, осуществляемая в условиях неопределенности и риска.

Предметом исследования является метод формирования портфеля ценных бумаг, оценка доходности и риска активов для инвестирования, а также оценка эффективности портфеля ценных бумаг.

Теоретические и методологические основы исследования. В качестве источников, составивших базу исследования, использованы отечествен-

ная и зарубежная монографическая литература, научные публикации в периодической печати, официальные статистические данные по рынку ценных бумаг, а также методическая, нормативная, учетная и отчетная документация кредитных организаций. В обобщении методов решения инвестиционных задач, подходов анализа и моделирования финансового рынка использованы работы зарубежных авторов: Марковица Г., Шарпа В., Навроцки Д., Росса С., Ролла Р., и др., а также работы отечественных авторов: Дудов С.И., Выгодчиков И.Ю., Мишарев А., Рязанова Б., Шведова А., Бабилова В., Касимова Ю., Шапкина А., Егоровой Н., Смулова А. и др. По вопросам математических методов в составе теоретической базы рассмотрены работы: Васильева Ф., Бахвалова Н., Вержбицкого В., Афанасьева В. и др.

Практическая значимость работы. Основные положения, выводы и рекомендации, полученные в ходе выпускной квалификационной работы, обеспечивают научную и практическую базу для решения прикладных задач, оптимизации структуры портфеля с применением численных методов. Разработанная модель формирования портфеля ценных бумаг может использоваться в учебном процессе в качестве наглядного примера по теории фондового рынка. К числу наиболее существенных результатов, полученных в ходе написания выпускной квалификационной работы, относится: алгоритм поиска структуры эффективного портфеля на основе метода проекции градиента, с последующей его реализацией на языке программирования C++.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе *"Основные понятия портфельного инвестирования рассматриваются этапы формирования и проблемы портфельного инвестирования, а также математическое ожидание доходности (ожидаемая доходность) и дисперсия (среднеквадратичное отклонение).*

В экономической литературе существует достаточно много различных определений ценной бумаги. Наиболее точными считаются определения, которые подчеркивают, что это документы, которые являются титулом собственности или правом на получение дохода, а также то, что это документы, подтверждающие права на реальные активы. Одним из существенных

свойств ценной бумаги является ее способность служить предметом купли-продажи на фондовом рынке.

Портфель ценных бумаг - это их совокупность, подобранная для достижения какой-либо цели и выступающая как целостный объект управления.

С учетом инвестиционных качеств ценных бумаг можно сформировать различные портфели ценных бумаг, в каждом из которых будет собственный баланс между существующим риском, приемлемым для владельца портфеля, и ожидаемой им отдачей (дохода) в определенный период времени. Соотношение этих факторов и позволяет определить тип портфеля ценных бумаг.

Считается, что риск - это одно из важнейших понятий, сопутствующих любой активной деятельности человека. Вместе с тем в отечественной литературе отсутствует однозначная трактовка понятия «риск». Во-первых, возможность отклонения от предполагаемой цели, ради которой принималось решение. Во-вторых, действия, предполагающие выбор, после которых можно оказаться в худших условиях, чем до сделанного выбора. В-третьих, действия, направленные на устранение неопределенности результата в ситуации выбора. В рамках данного курса можно использовать общее понятие экономического риска, сформулированное следующим образом:

риск в общем смысле - это вероятность наступления какого – либо неблагоприятного события, связанного с материальными и финансовыми потерями.

Для снижения риска портфеля используют два различных пути.

1-й путь состоит в компенсации рисков с помощью так называемых рискованных премий, которые представляют собой различного рода надбавки (к цене, уровню процентной ставки, тарифу и т.д.), выступающие в виде «платы за риск».

2-й путь заключается в управлении риском, которое осуществляется на основе диверсификации, что означает использование различных по свойствам инвестиционных инструментов для сокращения риска потерь, а также приемов хеджирования, заключения форвардных контрактов, покупки опционов, страхования.

Инвестиции в ценные бумаги в условиях неопределенности сопряжены с риском того, что фактическая доходность может отличаться от ожидаемой доходности.

Это дает основание рассматривать доходность R ценной бумаги, соответствующую некоторому периоду владения, как случайную величину, а выбор инвестиционной стратегии осуществлять на основе анализа ее числовых характеристик: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения. Математическое ожидание $m = M[R]$ доходности актива соответствует ожидаемой доходности, а дисперсия $\sigma^2 = D[R]$ или среднеквадратичное отклонение σ доходности могут использоваться как меры риска вложений в данный актив.

Идеальной для инвестора стратегией инвестирования в рамках данного подхода была бы стратегия, обеспечивающая достижение максимальной ожидаемой доходности при минимальном риске вложений. Однако одновременное достижение этих целей невозможно. Практика работы на финансовых рынках говорит о том, что большему значению ожидаемой доходности обычно соответствует и большее значение риска вложений.

Во второй главе *"Математическая формализация задачи в рамках подхода "доходность-риск" изложены исходные предположения относительно задачи Марковица, выведены формулы доходности и риска, применительно к портфелю ценных бумаг и приведено решение задачи оптимизации структуры портфеля.*

В 1952 году вышла статья Гарри Марковица под названием "Выбор портфеля". После этого особое внимание стали уделять взаимосвязи ценных бумаг в одном портфеле. В данной статье он впервые представил математическую модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг, в которой была предложена теоретико-вероятностная формализация понятий доходности и риска. Риск по ценной бумаге влечет полное или частичное неполучение дохода в конце периода инвестирования.

Предположения, при которых будет поставлена задача о формировании портфеля ценных бумаг с точки зрения подхода «доходность – риск», состоят в следующем:

- 1) инвесторы осуществляют оценку портфелей, основываясь на ожидаемой доходности и риске активов
- 2) при выборе из двух идентичных во всем, кроме ожидаемой доходности, портфелей инвестор выбирает портфель с большей ожидаемой доходностью;
- 3) при выборе из двух идентичных во всем, кроме риска, портфелей инвестор предпочитает портфель с меньшим риском;
- 4) активы бесконечно делимы;
- 5) существует безрисковая ставка, по которой инвестор может дать в займы или взять деньги в долг;
- 6) налоги и операционные издержки не учитываются. [5]

Пусть x_i - доля общего вложения, приходящийся на i -ый вид ценных бумаг, $i = \overline{1, n}$. Таким образом, $\sum_i^n x_i = 1$. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, определяет структуру портфеля ценных бумаг.

Пусть R_i — случайная величина доходности ценных бумаг i -го вида, как если бы весь капитал инвестора был бы целиком вложен в их покупку, $i = \overline{1, n}$. Тогда случайная величина R_p доходности портфеля со структурой, задаваемой вектором $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, есть очевидно

$$R_p = \sum_{i=1}^n R_i x_i$$

Следовательно, ожидаемая доходность такого портфеля соответствует формуле

$$m_p = M[R_p] = \sum_{i=1}^n x_i M[R_i] = \sum_{i=1}^n m_i x_i,$$

Теперь можно выразить математическое ожидание квадрата этого отклонения, то есть дисперсию случайной величины R_p . Дисперсия является статистической величиной, определяющей, насколько сильно прибыль от ценных бумаг колеблется вокруг своего среднего значения. Это понятие математически связано со средним квадратичным отклонением; по сути дела, они взаимозаменяемы.

$$\begin{aligned}
D_p &= M [(R_p - m_p)^2] = \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j M [(R_i - x_i)(R_j - m_j)] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij}
\end{aligned}$$

где величины

$$V_{ij} = M [(R_i - x_i)(R_j - m_j)],$$

являются ковариациями случайных величин R_i и R_j . [3]

Итак, задача заключается в отыскании структуры $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ портфеля, которая обеспечила бы достижение заданной ожидаемой доходности портфеля m_p с минимальным риском. Математическая формулировка задачи Марковица имеет вид

$$D_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij} \rightarrow \min_x$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = m_p$$

В третьей главе *"Метод проекции градиента в ней будет изложена: идея метода, способы выбора длины шага для решения задачи, и выведена формула, с помощью которой, будут проводиться вычислительные эксперименты.*

Рассмотрим данный метод применительно к задаче минимизации дифференцируемой функции на заданном выпуклом множестве X . В качестве начальной выбирается некоторая точка допустимой области X . Если множество X совпадает со всем пространством R_n , то рассматриваемый метод является обычным градиентным методом:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k), k = 0, 1, 2, \dots$$

где

$$f'(x_k) = \left(\frac{\partial f(x_k)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_n} \right)^T$$

градиент целевой функции $f(x)$ в точке x_k .

Однако, если $X \neq R_n$, то после выхода за границу множества X в некоторой граничной точке $x_k, k = 0, 1, 2, \dots$ движение в направлении антиградиента $-f'(x_k)$ может вывести за пределы допустимого множества. Поэтому для отыскания направления из точки x_k напрашивается мысль спроектировать точку $v_k = x_k - \alpha f'(x_k)$ на множество X и в качестве направления спуска взять $-s_k = p_k - x_k$, где $p_k = P_X(v_k)$ проекция v_k на X , после чего осуществляется спуск вдоль этого направления.

При этом выпуклость множества X гарантирует, что направление $p_k - x_k$ будет возможным, поскольку $[x_k, p_k] \subset X$.

Итак, метод проекции градиента состоит в вычислении проекции p_k точки $v_k = x_k - \alpha f'(x_k)$ на множество X и в выборе числа α_k так что

$$f(x_{k+1}) < f(x_k).$$

Для отыскания направления $-s_k = p_k - x_k$, следует решить задачу минимизации квадратичной функции $\|v_k - x\|^2$ на множестве X . В общем случае эта задача того же порядка сложности, что и исходная, однако для задач, когда допустимое множество имеет простую геометрическую структуру (например, является многомерным параллелепипедом), отыскание p_k осуществляется путем сравнения n чисел.

Способы выбора длины шага. Иногда приходится довольствоваться нахождением какого-либо $\alpha_k > 0$, обеспечивающего условие монотонности: $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Для этого обычно выбирают какую-либо постоянную $\alpha_k > 0$ и на каждой итерации берут $\alpha_k = \alpha$, а затем проверяют условие монотонности и при необходимости дробят величину $\alpha_k = \alpha$, добиваясь выполнения условия монотонности.[1]

В четвертой главе "Вычислительные эксперименты по решению задачи Марковица методом проекции градиента" рассматривается пример задачи Марковица на основе портфеля ценных бумаг Российских компа-

ний, с последующим проведением вычислительных экспериментов, которые позволят составить наиболее эффективный портфель в рамках подхода «доходность-риск», как с проведением операции короткая продажа, так и с запрещением данной операции, при этом будут использоваться численные методы, а именно метода проекции градиента.

Рассматривается пример формирования инвестиционного портфеля, состоящего из трех акций, которые занимаются разными относительно друг друга видами деятельности: ОАО «Газпром», где основные направления деятельности — геологоразведка, добыча, транспортировка, хранение, переработка и реализация газа, ОАО «Норильский никель»- это производство, маркетинг и реализация цветных и драгоценных металлов, ОАО «Мечел», который занимается горнодобывающей, металлургической и энергетической деятельностью. Период рассмотрения динамики изменения стоимости акций один год, в качестве вспомогательной программы для получения исходных данных будет использоваться пакет Microsoft Excel, а для реализации метода проекции градиента будет использоваться объектно-ориентированный язык программирования C++.

Язык программирования C++, выбран в качестве основной программы для подсчетов долей портфеля с использованием метода проекции градиента, в связи с тем, что он является чрезвычайно мощным языком, который содержит средства создания эффективных программ практически любого назначения.

Таким образом, необходимо решить оптимизационную задачу следующего вида: определить доли акций в портфеле для достижения минимального уровня риска инвестиционного портфеля при заданном уровне ожидаемой доходности.

В ходе проведения ряда вычислительных экспериментов был сформирован наиболее оптимальный портфель, который обладал заданным уровнем ожидаемой доходности и минимальным риском. Достоверность результатов, полученных в ходе работы программы, была проверена, в пакете Microsoft Excel. [4]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ценные бумаги играют важную роль в современной мировой экономике и от их использования необходимо пытаться получать максимально возможную прибыль, а это возможно только при условии формирования высокоэффективного портфеля ценных бумаг.

В результате проведения вычислительных экспериментов можно сделать следующий вывод, что с ростом ожидаемой доходности, уровень риска увеличивается, и постепенно в портфель включается все большее количество ценных бумаг, у которых риск в значительной степени превышает остальных, но при этом у них и самый высокий уровень ожидаемой доходности. Таким образом, при вложении средств в ценные бумаги, каждый инвестор стремится к максимальной доходности портфеля, однако доход всегда прямо пропорционален риску. Поэтому цель любого инвестора – найти наиболее приемлемое сочетание доходности и риска.

В ходе работы была проанализирована, в рамках существующих экономических условий, основная портфельная теория. Использование положений теории Марковица, диверсифицированного и оптимального портфеля, позволяет значительно улучшить качество портфеля. Так, включение в портфель активов с наименьшей корреляцией снижает общий риск портфеля, также как и диверсификация по секторам экономики при инвестировании в большее количество активов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации/Ф.П.Васильев.М.:Факториал пресс,2002.434с.
2. Четыркин Е.Н. Методы финансовых и коммерческих расчетов/Е.Н. Четыркин. М.:Дело, 1992.320с.
3. Дудов С.И. Оптимальное портфельное инвестирование/С.И. Дудов. Саратов: Издательский Центр «Наука» , 2008.79с.
4. Карманов В. Г. Математическое программирование/В.Г. Карманов. М.: Физматлит, 2004.264с.
5. Мишарев А.А. Рынок ценных бумаг/А.А. Мишарев. М.:Питер,2007.252с.