Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Параллельный алгоритм построения всех реализаций заданного вектора степеней без дополнительных проверок на изоморфизм

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы
специальности 090102.65 «Компьютерная безопасность»
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Сухова Сергея Александровича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. М.Б. Абросимов

Заведующий кафедрой
профессор, к.ф.-м.н. В.Н. Салий

Саратов 2016

ВВЕДЕНИЕ

Одной из задач, решаемых в теории графов, является задача генерации всех графов, обладающих заданными свойствами. Обычно переборные алгоритмы строят все возможные графы, среди которых есть и изоморфные. При этом в большинстве случае необходимости рассмотрения изоморфных друг другу графов нет, поскольку такие графы обладают одинаковыми свойствами (в том числе, с точки зрения реальных объектов, моделями которых они являются). Простейший подход к исключению изоморфных копий состоит в проверке изоморфности сгенерированного графа каждому из найденных ранее графов. Поскольку не известно полиномиальных алгоритмов проверки изоморфности двух графов и само количество графов, обладающих необходимыми свойствами, также может расти экспоненциально, такой подход зачастую неприемлем по времени работы. Однако существуют методы, позволяющие решать подобные задачи без осуществления дополнительных проверок на изоморфизм.

В данной работе приводится описание основанного на методе Рида-Фараджева алгоритма, который предназначен для генерации всех реализаций заданного вектора степеней. Хотя данный алгоритм не является новым, в настоящее время известен единственный источник, содержащий описание этого алгоритма. Упомянутое описание является неполным, содержит существенное количество опечаток, а доказательства некоторых важных теорем в нем приводятся лишь тезисно или не приводятся вообще. Именно поэтому при изложении данной работы основной упор делается на строгость математического доказательства используемых в алгоритме утверждений. Кроме того, в данной работе предлагается стратегия распределения данных, позволяющая исполнять рассматриваемый алгоритм на вычислительном кластере.

Описываемый алгоритм может использоваться не только непосредственно для генерации всех неизоморфных реализаций поданного на вход вектора степеней, но и в качестве составной части алгоритмов решения других задач. В частности, путем выполнения для сгенерированных графов дополнительных проверок или обработки нескольких векторов степеней с определенными свойствами этот алгоритм может быть адаптирован для генерации всех неизоморфных представителей более узких или, наоборот, более широких классов графов. В работе описывается применение алгоритма для построения всех неизоморфных графов с заданным числом вершин и для отыскания минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов. Иным применением алгоритма, также продемонстрированным в работе, является отыскание всех униграфичных векторов степеней заданной длины.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа состоит из 5 разделов.

Первые два раздела работы являются вводными. Раздел 1 «Основные определения и теоремы» содержит общие сведения из теории графов и теории групп, которые необходимы для понимания приводимых в работе построений и доказательств. Раздел 2 «Параллельные вычисления» содержит общую классификацию параллельных вычислительных систем, краткое описание основных функций, определенных стандартом MPI, применяемым в реализации параллельной версии алгоритма, а также информацию о способах взаимодействия с вычислительным кластером ПРЦНИТ СГУ, использовавшимся при тестировании реализации параллельной версии алгоритма.

Основным разделом работы является раздел 3 «Описание алгоритма». В пункте 3.1 приведено описание двух наиболее известных подходов к генерации комбинаторных структур без дополнительных проверок на изоморфизм (см. [22]), представлены основные идеи и конструкции, лежащие в основе алгоритма, которому посвящена данная работа, а также приведена общая схема этого алгоритма, которая детализируется в пунктах 3.2–3.5. Рассматриваемый алгоритм предполагает рекурсивное заполнение верхней половины матрицы смежности графа с отсечениями, гарантирующими генерацию лишь графов с заданным вектором степеней (пункт 3.2), и выполнение (по мере осуществления рекурсивных вызовов) проверок некоторых дополнительных условий, которые позволяют (по возможности эффективно, т.е. с сокращением пространства перебора) избегать генерации неканоничных матриц смежности (пункты 3.3 «Проверка полуканоничности заполнения строки», 3.4 «Проверка каноничности заполнения полосы» и 3.5 «Использование результатов проверки на каноничность»). В пункте 3.6 приводится описание стратегии распараллеливания описанной в предыдущих пунктах однопоточной версии алгоритма.

Раздел 4 «Применение алгоритма для поиска минимальных 1-расширений циклов» содержит подробное описание способа применения описанного в разделе 3 алгоритма генерации всех неизоморфных реализаций заданного вектора степеней для решения задачи построения всех неизоморфных минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов. Описываемый способ основан на том, что вектора степеней минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов имеют специфичный вид (см. [3]). Для решения данной задачи предлагается использовать также вспомогательный алгоритм (см. [23]), позволяющий эффективно проверять гамильтоновость графов с максимальной степенью вершины не более 3.

Раздел 5 «Реализация алгоритма» содержит описание и результаты тестирования практической реализации алгоритма, которому посвящена данная работа. В пункте 5.1 «Описание программы» приведены форматы входных и выходных файлов программы и перечислены допустимые ключи командной строки. В пункте 5.2 «Результаты тестирования однопоточной версии» приведены полученные с использованием разработанной программы данные о количестве классов изоморфизма n-вершинных графов и количестве униграфичных векторов длины n для n от 1 до 11 включительно, а также данные о количестве классов изоморфизма n-вершинных регулярных графов степени 3 (при $n \leq 24$) и 4 (при $n \leq 17$). Эти данные совпадают с данными энциклопедии числовых последовательностей OEIS, что подтверждает корректность разработанной программы. Кроме того, в данном пункте приводится экспериментальное сравнение скорости исполнения программы, описанной в разделе 3, и программы, реализующей тривиальный метод решения задачи; это сравнение показывает существенно более высокую эффективность разработанной программы. В пункте 5.3 «Результаты тестирования параллельной версии» на основе анализа результатов различных вычислительных экспериментов делается вывод о невозможности предложить «универсальный» уровень распараллеливания для векторов определенной длины, который бы позволил достичь близкого к минимальному времени работы на подавляющем большинстве таких векторов. Кроме того, в данном пункте эмпирически показывается, какой уровень распараллеливания необходимо выбирать для векторов степеней вида (3^n) и $(4,3^{n-1})$. В пункте 5.4 «Построение минимальных 1-расширений циклов» приводятся полученные с использованием алгоритма из раздела 4 данные о количестве n-вершинных графов, являющихся минимальными вершинными (реберными) 1-расширениями циклов, для $n \leq 26$. Эти данные совпадают с данными, приведенными в [25]. Следует отдельно отметить, что вычисления для $n=27$ и $n=28$ не удалось завершить в связи с невысокой производительностью используемого кластера ПРЦНИТ СГУ, существенной ограниченностью его ресурсов, а также регулярно возникавшими при использовании кластера проблемами технического характера. Указанные задачи могут быть решены при помощи разработанной программы за разумное время, если использовать для вычислений более производительный кластер.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе был приведен краткий обзор подходов к генерации комбинаторных структур без дополнительных проверок на изоморфизм, подробно (с доказательством всех применяемых утверждений и свойств) описан алгоритм построения всех неизоморфных реализаций заданного вектора степеней, основанный на методе Рида-Фараджева и использующий конструкции теории групп, а также предложена модификация этого алгоритма, позволяющая исполнять его на вычислительном кластере. В работе присутствует практическая реализация параллельной версии данного алгоритма на языке C++, а также результаты ее тестирования. В ходе вычислительного эксперимента были получены некоторые эмпирические правила выбора уровня распараллеливания, позволяющие достичь времени работы, близкого к оптимальному.

При помощи вспомогательной программы для генерации всех графичных векторов степеней определенной длины разработанный алгоритм был применен для нахождения всех неизоморфных графов с заданным числом вершин, а также для построения всех униграфичных векторов степеней заданной длины. Кроме того, в качестве демонстрации возможности практического применения разработанного алгоритма для решения более сложных задач теории графов был подробно описан и реализован на практике способ построения всех неизоморфных минимальных вершинных и реберных 1-расширений циклов, предполагающий использование алгоритма Эпштейна для проверки гамильтоновости графов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1) Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий. М.: Наука. Физматлит, 1997. 368 с. Яз. русский.

2) Емеличев, В. А. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев и др. М.: Наука, 1990. 384 с. Яз. русский.

3) Абросимов, М. Б. Графовые модели отказоустойчивости / М. Б. Абросимов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. 192 с. Яз. русский.

4) Городенцев, А. Л. Алгебра. Второй курс. 2010/2011 учебный год. Лекция 7 [Электронный ресурс] / А. Л. Городенцев. URL: http://vyshka.math.ru/pspdf/1011/algebra-2/lec_07.pdf (дата обращения: 12.10.2015). Яз. русский.

5) Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: учебник для вузов / А. И. Кострикин. М.: Физматлит, 2004. 272 с. Яз. русский.

6) Grund, R. Konstruktion molekularer Graphen mit gegebenen Hybridisierungen und überlappungsfreien Fragmenten [Электронный ресурс] / R. Grund. URL: ftp://ftp.mathe2.uni-bayreuth.de/DIPLOM/diss_grund.ps (дата обращения: 12.10.2015). Яз. нем.

7) Карпенко, А. П. Параллельные вычисления (базовый курс) [Электронный ресурс] / А. П. Карпенко. URL: http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=Parallel/base.cou (дата обращения: 13.10.2015). Яз. русский.

8) Гергель, В. П. Многопроцессорные вычислительные системы и параллельное программирование [Электронный ресурс] / В. П. Гергель и др. URL: http://www.hpcc.unn.ru/mskurs/CS338_full_rus.zip (дата обращения: 13.10.2015). Яз. русский.

9) MPI: A Message-Passing Interface Standard. Version 3.1 [Электронный ресурс]. URL: http://www.mpi-forum.org/docs/mpi-3.1/mpi31-report.pdf (дата обращения: 13.10.2015). Яз. англ.

10) MPICH | High-Performance Portable MPI [Электронный ресурс]. URL: http://www.mpich.org/ (дата обращения: 13.10.2015). Яз. англ.

11) Open MPI: Open Source High Performance Computing [Электронный ресурс]. URL: http://www.open-mpi.org/ (дата обращения: 13.10.2015). Яз. англ.

12) Intel® MPI Library | Intel® Developer Zone [Электронный ресурс]. URL: https://software.intel.com/en-us/intel-mpi-library (дата обращения: 13.10.2015). Яз. англ.

13) Microsoft MPI [Электронный ресурс]. URL: https://msdn.microsoft.com/en-us/library/bb524831%28v=vs.85%29.aspx (дата обращения: 14.10.2015). Яз. англ.

14) Баканов, В. М. Введение в практику разработки параллельных программ в стандарте MPI [Электронный ресурс] / В. М. Баканов, Д. В. Осипов. М.: МГАПИ, 2005. URL: http://www.ict.edu.ru/ft/005010/bakanov_mpi.pdf (дата обращения: 14.10.2015). 63 с. Яз. русский.

15) Антонов, А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI [Электронный ресурс] / А. С. Антонов. М.: Изд-во МГУ, 2004. URL: https://parallel.ru/sites/default/files/tech/tech_dev/MPI/mpibook.pdf (дата обращения: 14.10.2015). 71 с. Яз. русский.

16) Univa Grid Engine [Электронный ресурс]. URL: https://www.univa.com/resources/files/gridengine.pdf (дата обращения: 15.10.2015). Яз. англ.

17) IBM High Performance Workload Management with IBM Platform LSF [Электронный ресурс]. URL: http://www-03.ibm.com/systems/platformcomputing/products/lsf/ (дата обращения: 15.10.2015). Яз. англ.

18) Global Leader in HPC Workload Management - PBS Works [Электронный ресурс]. URL: http://www.pbsworks.com/ (дата обращения: 15.10.2015). Яз. англ.

19) TORQUE Resource Manager - Adaptive Computing [Электронный ресурс]. URL: http://www.adaptivecomputing.com/products/open-source/torque/ (дата обращения: 15.10.2015). Яз. англ.

20) Система пакетной обработки заданий torque. Руководство пользователя [Электронный ресурс]. URL: http://hpc.ssau.ru/files/doc/torque_manual.pdf (дата обращения: 15.10.2015). Яз. русский.

21) TORQUE Resource Manager. Administrator Guide 5.1.1 [Электронный ресурс]. URL: http://docs.adaptivecomputing.com/torque/5-1-1/torqueAdminGuide-5.1.1.pdf (дата обращения: 15.10.2015). Яз. англ.

22) Brinkmann, G. Isomorphism rejection in structure generation programs / G. Brinkmann // Dimacs Series In Discrete Mathematics And Theoretical Computer Science. 2000. №51. Яз. англ.

23) Eppstein, D. The Travelling Salesman Problem for Cubic Graphs [Электронный ресурс] / D. Eppstein // Journal of Graph Algorithms and Applications. 2007. №1. URL: http://jgaa.info/accepted/2007/Eppstein2007.11.1.pdf (дата обращения: 06.12.2015). Яз. англ.

24) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс]. URL: http://oeis.org/ (дата обращения: 17.10.2015). Яз. англ.

25) Бринкман, Г. О количестве минимальных расширений циклов с числом вершин до 26 / Г. Бринкман, М. Б. Абросимов // Дискретная математика, теория графов и их приложения: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 11–14 ноября 2013 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2013. Яз. русский.