Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Элементарная теория делимости в курсе основной школы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета

Карпушиной Анастасии Сергееевны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ________________________ Т.А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ________________________ И.К. Кондаурова

Саратов 2016 год

Введение. Реформы математического образования, затрагивая содержание школьных программ, неизменным сохраняют некоторое «ядро» из таких тем, без которых учащиеся не получают полного представления о математике и ее методах. Данные темы концентрируют в себе математические знания, основами которых должен обладать человек в современном обществе, и которые используются как в повседневной жизни для решения возникающих на практике задач, так и для решения внутриматематических проблем и задач прикладного характера.

Теория делимости чисел – одна из древнейших математических теорий. Арифметические исследования послужили базой для создания ряда разделов математики и, в то же время, теория чисел использует аналитические, алгебраические, геометрические и многие другие методы для решения теоретико-числовых проблем.

Делимость – фундаментальное понятие алгебры, арифметики и теории чисел, связанное с операцией деления. Вопросами делимости чисел занимались еще математики Древней Греции: в теории чисел ими была проведена большая работа по типологии натуральных чисел; они делили множество натуральных чисел на классы, выделяя классы совершенных чисел, дружественных чисел, фигурных чисел, простых чисел и др.

В книге Евклида «Начала» содержится доказательство бесконечности множества простых чисел. Древнегреческий ученый Эратосфен нашел способ составления таблиц простых чисел, названный позднее «решето Эратосфена».

Вклад в изучение признаков делимости чисел внес Блез Паскаль. Он нашел алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число, из которого следуют все частные признаки.

Проблемами делимости чисел на уроках математики занимались многие методисты и математики: Ж. Адамар, В. Г. Болтянский, И.М. Виноградов, В. А. Далингер, Д. Пойа, Г. И. Саранцев, К. П. Сикорский, А. А. Столяр, П. Л. Чебышев и др.

Тема «Делимость чисел» включена в школьный курс математики 5-6 классов и почти не рассматривается в школьном курсе алгебры 7-9 классов, хотя в контрольно измерительных материалах государственной итоговой аттестации задачи по теории делимости присутствуют, что делает необходимым включение задач по элементарной теории делимости в школьный курс «Алгебры 7-9» и обуславливает актуальность темы исследования.

Под элементарной теорией делимости будем понимать содержание темы школьного курса математики, объединенное в разделы «Делимость натуральных чисел», «Делимость чисел».

Цель исследования – описать математическое содержание темы «Элементарной теории делимости» и разработать циклы задач, реализующие внутрипредметные связи между данной темой и основными темами школьного курса алгебры.

Задачи исследования:

1. Описать математическое содержание темы «Элементарная теория делимости».

2. Разработать циклы задач по теории делимости, реализующие внутрипредметные связи данной темой с основными темами школьного курса алгебры.

Методы исследования: анализ учебно-методической литературы; изучение нормативных документов; обобщение опыта работы действующих учителей; разработка методических материалов; социологический опрос.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Математическое содержание темы «Элементарная теория делимости»»; «Методическое обеспечение изучения темы «Элементарная теория делимости» в курсе основной школы»); заключение; список использованных источников; приложения.

Основное содержание работы. В первой главе «Математическое содержание темы «Элементарная теория делимости»» даны основные понятия элементарной теории делимости: определение и свойства делимости, признаки делимости, определение простого и составного числа, разложение на простые множители.

Определение 1. Целое число a делится на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое число c, что $a=b\cdot c$.

Определение 2. Если натуральное число a делится нацело на натурально число b, то a называют кратным числа b, а число b – делителем числа a.

Теорема 1 (о делении с остатком). Для любого целого числа a и любого натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r, такие, что $a=b\cdot q+r$ и $0 \leq \mathrm{r} < |b|$. В этом случаи число q называется неполным частым, а целое неотрицательное число r называется остатком от деления a на b.

Рассмотрены признаки делимости на 2, 5, 10, 4, 8, 25, 3, 9, 7, 11, 13.

Определение 3. Натуральное число $p > 1$ называется простым, если, кроме 1 и p, оно не имеет других натуральных делителей.

Определение 4. Натуральное число, большее единицы, имеющее больше двух натуральных делителей, называется составным числом.

Теорема 2. Если натуральное число p, большее единицы, не делится ни на одно из простых чисел, квадраты которых не превосходят p, то число p простое.

Определение 5. Наибольшим общим делителем (НОД) двух натуральных чисел a и b называется такой их общий натуральный делитель d, который делится на любой другой их общий делитель (обозначение $(a;b)$).

Теорема 3. Пусть m и n – два целых числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля, и $d=(m,n)$ – их наибольший общий делитель. Тогда существуют такие целые числа x_0 и y_0, что $mx_0+ny_0=d$.

Теорема 4. Пусть m и n – два целых числа, хотя бы одно из которых отлично от нуля, и $d=(m,n)$ – их наибольший общий делитель. Число c в том и только в том случаи является общим делителем чисел m и n, если оно является делителем числа d.

Определение 6. Наименьшим общим кратным (НОК) двух натуральных чисел a и b называется такое их общее натуральное кратное m, которое делит любое другое их общее кратное (обозначение $[a;b]$).

Теорема 5. Для любых двух натуральных чисел a, b произведение их наибольшего общего делителя на их наименьшее общее кратное равно произведению самих чисел $(a,b) \cdot [a,b] = ab$.

Теорема 6. Каждое натуральное число, большее единицы, может быть разложено на простые множители. Любые два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться только порядком множителей.

Во второй главе «Методическое обеспечение изучения темы «Элементарная теория делимости» в курсе основной школы» проведен анализ содержания школьных учебников и методических пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации по теме исследования, разработаны интерактивные упражнения и циклы дополнительных задач для 5-6, 7-9 классов по теме «Элементарная теория делимости» и сформулированы методические рекомендации по их применению, дано описание и анализ социологического опроса.

Для проведения анализа содержания темы «Элементарная теория делимости» по учебникам математики 5, 6 классов были рассмотрены следующие учебники, рекомендованные для использования в 2015-2016 учебном году: (1) С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин «Математика 5»; (2) Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков «Математика 6»; (3) И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович «Математика 6»; а так же учебник, включенный в федеральный список Министерством образования и науки РФ, начиная с 2016 года (4) А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир «Математика 6»;

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы: теоретический и практический (задачный) материал, представленный в рассмотренных учебниках почти идентичен, но наилучшим способом, на наш взгляд, материал изложен в учебнике С. М. Никольского. В нем были рассмотрены следующие вопросы: свойства делимости; признаки делимости; простые и составные числа; делители натурального числа; наибольший общий делитель; наименьшее общее кратное. При рассмотрении каждого из них, авторы уделяют много внимания формированию доказательных умений. Хотя доказательство свойств и признаков делимости проводится на числовых примерах, методы, используемые при доказательстве, могут быть распространены на общий случай.

В учебниках «Алгебра» для 7-9 классов, предназначенных для общеобразовательных школ, эта тема почти не затрагивается на базовом уровне. Также следует отметить, что в основной школе завершается изучение методов решения текстовых задач, однако при изучении курса алгебры (на базовом уровне) почти не рассматриваются текстовые задачи на использование свойств делимости, понятий наибольшего общего делителя, наименьшего общего кратного.

С другой стороны, анализ методической литературы показал, что задачи по теории делимости представлены в государственной итоговой аттестации. Например, в 2015 году в демоверсии ЕГЭ на базовом уровне предложена задача «Сумма цифр трехзначного числа a делится на 13. Сумма цифр $a+5$ также делится на 13. Найдите число a»; в 2016 году – задача «Приведите пример трехзначного числа, сумма цифр которого равна 20, а сумма квадратов цифр делится на 3, но не делится на 9».

Для устранения указанного «пробела» целесообразно рассматривать задачи по теории делимости при изучении ряда тем школьного курса «Алгебра 7-9».

Для этого в содержании школьного курса алгебры 7-9 классов были выявлены темы, при изучении которых можно использовать задачи по теории делимости.

В курсе «Алгебра 7» – темы «Формулы сокращенного умножения», «Разложение на множители», «Решение линейных уравнений», «Система линейных уравнений».

Например, при изучении формул сокращенного умножения можно предложить учащимся следующую задачу.

Задача. Докажите, что число составное: а) 288; б) 323; в) 1599; г) 1000027.

В курсе «Алгебра 8» – тема «Дробные рациональные уравнения».

Задача. Найдите знаменатель дроби, полученной после сокращения $\frac{100!}{10^{100}}$.

В курсе «Алгебра 9» – темы «Квадратный трехчлен», «Арифметическая и геометрическая прогрессии». Например, при изучении в рамках темы «Квадратный трехчлен» вопроса, связанного с выделением полного квадрата двучлена, можно рассмотреть задачу.

Задача (С. Жермен). Доказать, что каждое число вида a^4+4 есть составное (если а не равно1).

Для мотивации учащихся 5-6 классов при изучении темы «Элементарная теория делимости» нами были разработаны следующие интерактивные упражнения: «Делители и кратные», «Признаки делимости», «Делимость чисел. Простые и составные числа», «Наименьшее общее кратное», «Свойства делимости», «Деление с остатком», «Задачи на делимость с остатком».

В качестве примера рассмотрим следующие два интерактивных упражнение.

1. Упражнение «Деление с остатком», в котором учащимся предлагается «найти пару». В задании представлено 11 примеров и 11 вариантов ответов. Необходимо установить взаимно однозначное соответствие: к каждому примеру найти свой ответ. Если пара найдена верно, то вся пара выделяется зеленым цветом, если пара найдена неправильно, то – красным цветом.

2. Упражнение «Делители и кратные» – викторина с выбором правильного ответа. Учащимся предлагается 6 вопросов: Какое из чисел является делителем числа 36? В какой строке записаны все делители числа 16? Укажите все двузначные числа, кратные 23. Какое число не является делителем числа 50? Какое число является кратным числа 9? Какое из чисел является кратным числу 24? Необходимо выбрать правильный ответ.

Все интерактивные упражнения разработаны нами самостоятельно по аналогии с представленными на сайте «learningapps.org», при этом одно из упражнений – кроссворд по теме «Делимость чисел. Простые и составные числа» было исправлено и дополнено.

Разработанные интерактивные упражнения можно использовать непосредственно на уроке: либо на этапе закрепления знаний, либо на этапе контроля знаний.

Для учащихся 5-6 классов нами дополнительно подобраны задачи на использование свойств делимости, понятия наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Приведем примеры двух таких задач.

Задача 1. Ученики $5^{А}$ класса купили 203 учебника. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников, и сколько учебников купил каждый из них?

При решении текстовых задач по теме «Наибольший общий делитель» основная трудность заключается в том, чтобы увидеть, что данные и искомые должны выражаться целыми числами. Кроме того, значения искомых бывают ограничены соображениями здравого смысла, связанными с содержанием задачи и личностным опытом учащегося.

Задача 2. В 9 классе за контрольную работы 1/7 учеников получила пятерки, 1/3 – четверки, 1/2 – тройки. Остальные работы оказались неудовлетворительными. Сколько было таких работ?

При решении текстовых задач по теме «Наименьшее общее кратное» трудности связаны с тем, что в отличии от общих делителей количество общих кратных бесконечно, поэтому бывает необходимо использовать либо соображение здравого смысла, либо особенности условия каждой конкретной задачи, чтобы сократить перебор.

В традициях отечественной школы при изучении математики «всегда уделялось большое внимание занимательным задачам, так как считалось, что элемент занимательности облегчает обучение». Среди дополнительных задач по теории делимости представлены старинные задачи.

Задача (Сколько яиц в лукошке?). Пришел крестьянин на базар и принес лукошко яиц. Торговцы его спросили. «Много ли у тебя в том лукошке яиц?» Крестьянин молвил им так: «Я всего не помню на перечень, сколько в том лукошке яиц. Только помню: перекладывал я те яйца в лукошко по 2 яйца, то одно яйцо лишнее осталось на земле; и я клал в лукошко по 3 яйца, то одно же яйцо осталось; и я клал по 4 яйца, то одно же яйцо осталось; и я их клал по 6 яиц, то одно же яйцо осталось; и я клал их по 7 яиц, то ни одного не осталось. Сочти мне, сколько в том лукошке яиц было»?

Задача (А. Ризе). Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлось ¼ этой суммы, на долю второго 1/7, а на долю третьего – 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

Задача (из «греческой антологии»).

– Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

– Вот сколько, – ответил философ, – половина изучает математику, четверть музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

Один из этапов исследования состоял в проведении диагностики учителей математики, связанной с проблемами изучения темы «Элементарная теория делимости».

На Всероссийском конструкторе электронных портфолио было проведено анкетирование учителей математики. В социологическом опросе приняли участие 70 педагогов из разных регионов Российской Федерации. Педагогам было предложено ответить на семь вопросов:

1. Сложно ли дается учащимся тема «Делимость чисел»?

Анализ ответов на первый вопрос показал, что большинство педагогов (77%) ответивших на вопрос, считают, что данна тема является сложной для учащихся.

2. В чем состоят трудности?

Варианты ответов: (1) при нахождении НОД, НОК; (2) при решении задач; (3) нет трудностей.

При ответе на второй вопрос 67% педагогов подчеркнули, что наиболее трудным для учащихся является решение задач, 24% педагогов указали, что трудности также присутствуют при нахождении НОД и НОК. 8% ответили, что трудностей не возникает.

3. Какие средства обучения Вы используете при изучении данной темы?

– Печатные (учебники и учебные пособия, книги для чтения, хрестоматии, рабочие тетради, атласы, раздаточный материал и т.д.).

– Электронные образовательные ресурсы (часто называемые образовательные мультимедиа мультимедийные учебники, сетевые образовательные ресурсы, мультимедийные универсальные энциклопедии и т.п.).

– Аудиовизуальные (слайды, слайд-фильмы, видеофильмы образовательные, учебные кинофильмы, учебные фильмы на цифровых носителях (Video-CD, DVD, BluRay. HDDVD и т.п.).

– Печатные и электронные образовательные ресурсы.

– Печатные и аудиовизуальные.

– Печатные, электронные, аудиовизуальные.

– Электронные и аудиовизуальные.

При ответе на третий вопрос анкеты учителя ответили:

40 % учителей указали, что использует печатные, электронные, аудиовизуальные.

26 % учителей ответили, что на своих уроках используют печатные и электронные образовательные ресурсы.

18% учителей указали, используют только печатные.

4. Даете Вы учащимся олимпиадные задачи по данной теме?

Варианты ответов: (1) да, в урочное время; (2) да, во внеурочное время; (3) нет.

Отвечая на четвертый вопрос анкеты 57% учителей высказались, что предлагают во внеурочное время.

5. Справляются ли учащиеся с олимпиадными задачами?

На пятый вопрос анкетирования 55% учителей ответили, что учащиеся справляются.

6. Даете Вы учащимся исторические задачи по данной теме?

Варианты ответов: (1) да, в урочное время; (2) да, во внеурочное время; (3) нет.

На шестой вопрос анкеты 50% учителей ответили, что рассматривают исторические задачи в урочное время, 32% учителей ответили, что рассматривают исторические задачи во внеурочное время и 17% не рассматривают вовсе.

7. Справляются ли учащиеся с историческими задачами?

На последний седьмой вопрос 68% учителей указало, что учащиеся справляются с историческими задачами.

Таким образом, проведенный социологический опрос показал, что тема «Элементарная теория делимости» трудна для учащихся, наиболее трудное для них является решение задач. Чтобы заинтересовать учащихся 5-6 классов мы разработали интерактивные упражнения. Так же были разработаны циклы дополнительных задач, представленные в пунктах 2.2 и 2.3 бакалаврской работы.

Заключение. В заключении сформулированы основные выводы по работе.

1. Анализ содержания рассмотренных школьных учебников «Математика 5-6» различных авторов показал, что содержание темы «Элементарная теория делимости» в них изложено идентично, поэтому изучать данную тему можно по любому из учебников, включенных Министерством образования и науки Российской Федерации в федеральный перечень.

2. В учебниках «Алгебра 7-9» почти не рассматривается данная тема, хотя в материалах государственной итоговой аттестации встречаются задачи по

теории делимости. Возникает необходимость рассматривать задачи по теории делимости при изучении тех тем школьного курса алгебры 7-9 классов, в которые могут быть органично включены данные задачи. При выборе дополнительных задач руководствовались критерием, что условие задачи может быть переформулировано применительно к изучаемой теме школьного курса «Алгебра 7-9».

3. Разработанные интерактивные упражнения, а так же часть подобранных заданий нацелены на мотивацию учащихся, «формирование логического и математического мышления,…, умения находить нестандартные способы решения задач».

4. Среди подобранных задач по теории делимости включены старинные задачи, реализующие содержательно-методическую линию «Математика в историческом развитии», что отвечает требованиям ФГОС, в соответствии с которыми «изучение учащимися математики должно обеспечивать сформированность представлений о математики как части общечеловеческой культуры».

По материалам бакалаврской работы подготовлена к печати статья «Старинные задачи по теории делимости» для сборника «Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки. Выпуск 15» и представлен доклад на ежегодной научной конференции преподавателей и студентов механико – математического факультета СГУ им. Н. Г. Чернышевского в 2016 г.

Список использованных источников включает в себя 32 наименования.