Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Задачи на экстремум в курсе основной школы**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета

Рыхловой Дарины Игоревны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ________________________________________Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент ________________________________________И. К. Кондаурова

Саратов 2016 год

**Введение.** Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения величин обычно называют задачами на нахождение экстремумов или задачами на оптимизацию. Такие задачи общепризнано являются важными как для самой математики и ее приложений, так и для практической деятельности человека. В жизни постоянно приходится сталкиваться с необходимостью принять наилучшее (оптимальное) решение. Огромное число подобных проблем возникает в физике и других областях естествознания, в технике, в экономике. Русский математик XIX века П. Л. Чебышев в своей работе «Черчение географических карт» писал, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды».

На протяжении всей истории развития математики задачи на экстремум и способы их решения вызывали большой интерес у специалистов и любителей. Впервые высказал мысль о том, что природа управляется экстремальными принципами древнегреческий ученый Герон. Со временем появилось много интересных задач в геометрии, алгебре, физике, которые связаны с поиском максимумов и минимумов, разного рода экстремумов. В решении этих конкретных задач принимали участие видные ученые прошлых эпох − Евклид, Архимед, Герон, Тарталья, Торричелли, Иоганн и Якоб Бернулли, Ньютон, Коши, Вейерштрасс и многие другие. Если в античные времена экстремальные задачи исследовались только геометрическими методами, и каждая задача для своего решения требовала специфического приема, то в XVII веке появились общие методы изучения экстремальных задач, которые привели к созданию математического анализа.

В общем виде теория экстремальных задач изучается в вузах. С простейшими экстремальными задачами знакомятся в школе, в курсе алгебры и начал анализа 10 класса изучается общая схема решения экстремальных задач методами математического анализа (с использованием производной). Рассмотрение частных методов решения задач на экстремум наряду с общим методом не предусмотрено школьной программой, что не способствует качественному усвоению темы и обедняет математическую подготовку учащихся.

Принятый ФГОС СОО нацеливает, в частности, на формирование «умения находить нестандартные способы решения задач», что применительно к задачам на экстремум означает изучение частных (элементарных) методов решения таких задач как в 10 классе, параллельно с рассмотрением общего метода решения экстремальных задач, так и заблаговременно, в 7-9 классах.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений регулярно включаются в материалы ОГЭ (модуль «Реальная математика») и ЕГЭ, но, к сожалению, относятся к числу наиболее трудных для учащихся.

Всё вышесказанное подчеркивает актуальность выбранной темы.

Цель работы: рассмотрение частных методов решения задач на экстремум в курсе основной школы и формулирование методических рекомендаций по решению экстремальных задач.

Задачи работы:

1. Рассмотреть основные понятия темы «Экстремум функции».
2. Изучить частные методы решения экстремальных задач.
3. Сформулировать методические рекомендации по решению задач на экстремум.

Методы исследования: анализ учебно-методической и математической литературы; анализ научно-популярной литературы; изучение нормативных документов; обобщение опыта работы действующих учителей; разработка методических материалов; социологический опрос.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Теоретические основы темы «Экстремум функции»; «Методические аспекты обучения решению задач на экстремум»); заключение; список использованных источников.

**Основное содержание работы.** В первой главе «Теоретические основы темы «Экстремум функции» рассмотрены основные понятия экстремума функции.

Определение 1. Пусть функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда точка $x_0$ называется точкой максимума функции $f$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$, если $|\Delta x| < \delta$.

Определение 2. Пусть функция $f$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда точка $x_0$ называется точкой минимума функции $f$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, если $|\Delta x| < \delta$.

Если существует такое $\delta > 0$, что $f(x + \Delta x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$) для всех $\Delta x \neq 0$, таких, что $|\Delta x| < \delta$, то точка $x_0$ называется точкой строгого максимума (соответственно строгого минимума).

Точки максимума (строгого максимума) и минимума (строгого минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

Для точек строгого экстремума функции $f$ и только для них приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ не меняет знака при переходе аргумента через точку экстремума $x_0$, т. е. при изменении знака $\Delta x$. Именно $\Delta f < 0$ для точек строгого максимума независимо от знака $\Delta x$.

Теорема 1 (теорема Ферма). Пусть функция $f$ определена на некотором интервале $(a,b)$ и в точке $\xi \in (a,b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение на $(a,b)$. Если производная $f'(\xi)$ существует, то она равна нулю.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). Пусть точка $x_0$ является точкой экстремума функции $f$, определенной в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда либо производная $f'(x_0)$ не существует, либо $f'(x_0) = 0$.

Это непосредственно следует из теоремы Ферма, примененной к интервалу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta$ есть то $\delta$, которое указано в определении точек экстремума.

Теорема 3 (достаточное условие строгого экстремума). Пусть функция $f$ дифференцируема на интервале $(a,b)$, кроме, быть может, точки $x_0 \in (a,b)$, в которой она является, однако, непрерывной. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0$ (это означает, что существует такое $\delta > 0$, что значения производной $f'$ на каждом интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ имеют один и тот же знак, а на разных – противоположный), то точка $x_0$ является точкой строгого экстремума.

Общий метод решения задач на экстремум методами математического анализа (с использованием производной) изучается в школьном курсе алгебры и начал анализа 10 класса.

Целесообразно перед изучением общего (универсального) метода знакомить учащихся с частными (элементарными) методами решения задач на экстремум, причем это необходимо и возможно делать в основной школе, так как такие методы решения иногда оказываются проще, рациональнее по сравнению с общим методом.

Во второй главе «Методические аспекты обучения решению задач на экстремум» рассмотрены элементарные методы решения задач на экстремум, сформулированы методические рекомендации по решению задач на экстремум.

При решении задач на экстремум используются следующие методы решения:

I. Метод выделения полного квадрата.

II. Метод перебора.

III. Метод введения параметра.

I. Метод выделения полного квадрата.

Решение многих алгебраических задач на максимум и минимум сводится к исследованию функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. При нахождении наибольшего или наименьшего значения квадратичной функции или выделяется полный квадрат двучлена:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

или используется следующая теорема.

Теорема 5. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает экстремальное значение при $x_0 = -\frac{b}{2a}$, равное $y_0 = c - \frac{b^2}{4a} = ax_0{}^2 + bx_0 + c$. Это значение будет наибольшим (максимумом), если $a < 0$, и наименьшим (минимумом), если $a > 0$.

Из теоремы об экстремуме квадратичной функции вытекает важное следствие.

Следствие. Произведение двух положительных множителей, сумма которых постоянна, достигает наибольшего значения тогда, когда эти множители равны.

II. Метод перебора.

При решении задач на экстремум в школе встречаются задачи, решение которых представляет собой выборку на конечном множестве объектов. Метод решения этих задач не является универсальным, так как он связан с решением задач, в которых рассматривается конечное множество, выраженное натуральными числами. Однако роль этого метода очень важна, так как он воспитывает практические навыки учащихся, развивает потребность в нахождении оптимального результата оптимальной модели.

III. Метод введения параметра.

При нахождении наибольших и наименьших значений функции $y = f(x)$ рассматривается данное равенство как уравнение с неизвестным $x$ и параметром $y = p$, и решается задача: «при каких значениях параметра $p$ это уравнение имеет решение».

Введение экстремальных задач в обучение педагогически оправдано, так как они с достаточной полнотой закладывают в сознание учащихся понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучше. Решая задачи указанного типа, учащиеся видят, с одной стороны, абстрактный характер математических понятий, с другой – их эффективную применимость к решению практических, жизненных задач.

Приведем примеры задач на применение каждого из рассмотренных частных методов:

1. Найдите наибольшее возможное значение числа $abc+ab+bc+ac$, если неотрицательные числа *a, b* и *c* удовлетворяют равенству $a+b+c=12$.
2. В кабинет математики к началу консультации пришли 3 ученика (А, В, С). Предварительный разговор позволил учителю выяснить, что для рассмотрения вопроса ученика А требуется 5 мин, ученика В – 2 мин, ученика С – 7 мин. после получения ответа на свой вопрос ученик уходит. Как организовать консультацию, чтобы каждый из учеников находился в кабинете как можно меньше времени? Иными словами, учитель хочет как можно меньше задержать каждого из них, т. е. минимизировать общее время, проведённое учениками в кабинете.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции:

$$y=\frac{2x+1}{x^2-x+1}.$$

Подробнее рассмотрим решение второй задачи:

В кабинет математики к началу консультации пришли 3 ученика (А, В, С). Предварительный разговор позволил учителю выяснить, что для рассмотрения вопроса ученика А требуется 5 мин, ученика В – 2 мин, ученика С – 7 мин. после получения ответа на свой вопрос ученик уходит. Как организовать консультацию, чтобы каждый из учеников находился в кабинете как можно меньше времени? Иными словами, учитель хочет как можно меньше задержать каждого из них, т. е. минимизировать общее время, проведённое учениками в кабинете.

Можно предложить учащимся записать условие и оформить решение задачи в виде таблицы (таблица 1, таблица 2):

Таблица 1 – Наглядно - образная модель условия задачи

| Ученик | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Время | 5 | 3 | 7 |

Таблица 2 − Оформление решения

| Очерёдность получения консультации | Время на выяснения вопроса (мин) | Время, затраченное каждым учеником (мин) | Суммарное время (мин ) |
|---|---|---|---|
| A, B, C<br>A, C, B<br>B, C, A | 5, 3, 7<br>5, 7,3<br>3, 7, 5 | 5; 5+3; 5+3+7<br>5; 5+7; 5+7+3<br>3; 3+7; 3+7+5 | 5+8+15=28<br>5+12+15=32<br>3+10+15=28 |
| B, A, C | 3, 5, 7 | 3; 3+5; 3+5+7 | 3+8+15=26 |
| C, A, B<br>C, B, A | 7, 5, 3<br>7, 3, 5 | 7; 7+5; 7+5+3<br>7; 7+3; 7+3+5 | 7+12+15=34<br>7+10+15=32 |

При оформлении таблицы 2 указываются все возможные последовательности консультаций учеников, то есть ABC, ACB, BCA и т.д.; время на выяснение вопроса; время, затраченное каждым учеником и суммарное время. При рассмотрении каждого варианта последовательностей задаются следующие наводящие вопросы: «При очередности ABC время, затраченное учеником A − ? мин, сколько время в этом случае затратит ученик B и C?».

Из составленной таблицы 2 легко находится оптимальный вариант решения задачи (таблица 3):

Таблица 3 – Оптимальное решение

| Ученик | B | A | C |
|---|---|---|---|
| Время, нужное для выяснения вопроса (мин) | 3 | 5 | 7 |
| Время, затраченное учеником (мин) | 3 | 8 | 15 |

Суммарное время: 3 + 8 + 15 = 26 мин.

Итак, на примере решения данной задачи представлена возможность подведения учащихся к пониманию способов построения искомых последовательностей (3, 5, 7) и (3, 8, 5).

Решение задач на экстремальные перестановки способствует приобретению учениками определённых комбинаторных навыков и знаний, более глубокому пониманию изучаемого материала.

Для диагностики проблем, связанных с изучением экстремальных задач был составлен социологический опрос для учителей.

На Всероссийском конструкторе электронных портфолио и в социальной сети «Вконтакте» было проведено анкетирование учителей математики. В опросе приняли участие 65 педагогов из разных регионов Российской Федерации. Педагогам было предложено ответить на три вопроса:

1. Ориентируете ли Вы учеников на обязательное решение задач «на нахождение наибольшего и наименьшего значения» при выполнении заданий ОГЭ?

- нет, пусть выбирают для решения те задачи, которые им под силу;
- только успешных в математике учеников;
- при подготовке к ОГЭ мы рассматриваем всевозможные задачи, в том числе задачи на «наибольшее и наименьшее значение»;
- специально учеников к ОГЭ не готовлю, поэтому вопрос о задачах на «наибольшее и наименьшее значение» не актуален.

2. Как справляются учащиеся с задачами на нахождение наименьшего и наибольшего значения в ходе подготовки к ОГЭ?

- правильно находят решение самостоятельно, без моей помощи;
- правильно находят решение, только через серию наводящих вопросов, поэтому такие задачи разбираются детально и решаются в большом количестве;
- не могут самостоятельно приступить к решению таких задач даже после неоднократного к ним обращения;
- даже не пытаются пробовать решать такие задачи.

3. Какие задачи в школьном курсе математики способствуют развитию аналитического мышления?

- задачи на экстремум (решаемые алгебраическим методом);

– текстовые задачи;
– задачи на делимость;
– задачи с параметрами.

Анализ ответов на первый вопрос показал, что большинство педагогов (74,6%) при подготовке к ОГЭ рассматривают всевозможные задачи, в том числе и задачи «на наибольшее и наименьшее значение».

При ответе на второй вопрос 69% педагогов выбрали вариант, что, при подготовке к ОГЭ учащиеся правильно находят решение задач «на наибольшее и наименьшее значение», но только через серию наводящих вопросов, поэтому при подготовке такие задачи решаются детально и в большом количестве; 12% педагогов ответили, что ученики самостоятельно находят решение, без участия педагога; 19% педагогов отметили, что ученики не могут самостоятельно приступить к решению таких задач, даже после неоднократного обращения к ним.

При ответе на третий вопрос большинство педагогов (55%) указало, что развитию аналитического мышления в школьном курсе математики способствуют текстовые задачи; 24% педагогов ответили, что развитию аналитического мышления в школьном курсе математики способствуют задачи с параметрами; 19% педагогов считают, что развитию аналитического мышления в школьном курсе математики способствуют задачи на экстремум (решаемые алгебраическим методом); только 1,5% педагогов считают, что развитию аналитического мышления в школьном курсе математики способствуют задачи на делимость.

Таким образом, проведенное анкетирование позволило выявить некоторые проблемы решения задач «на нахождение наибольшего и наименьшего значения» при подготовке к ОГЭ, для решения которых целесообразно на уроках математики в основной школе использовать экстремальные задачи, так как они способствуют развитию аналитического мышления, а так же помогают подготовить учащихся к государственной итоговой аттестации.

**Заключение.** Изучение частных методов решения задач на экстремум, наряду с общим методом решения, позволяет систематизировать и обобщить знания по теме «Экстремальные задачи».

Использование частных методов решения экстремальных задач в курсе математики основной школы носит развивающий характер, что отвечает требованиям ФГОС СОО, способствует формированию алгоритмической культуры и нестандартного мышления, развивает математические способности и аналитическое мышление, обогащает математическую подготовку учащихся.

Изучение частных методов решения задач на экстремум в основной школе играет большую мотивационную роль, увеличивая интерес к предмету.

Введение экстремальных задач в обучение педагогически оправдано, так как они с достаточной полнотой закладывают в сознание учащихся понимание того, как человек ищет, постоянно добивается решения жизненных задач, чтобы получающиеся результаты его деятельности были как можно лучшими. Кроме того, в процессе решения большей части экстремальных задач элементарными методами широко и удачно используются эвристические приёмы, что способствует развитию творческих способностей.

По материалам бакалаврской работы опубликована статья в сборнике «Учитель-ученик: проблемы, поиски, находки: Выпуск 14» и представлен доклад на ежегодной научной конференции преподавателей и студентов механико-математического факультета СГУ имени Н.Г. Чернышевского (15. 04. 2016).

Список использованных источников состоит из 25 наименований.