

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

**Совершенствование системы методической работы
с математическими ошибками школьников**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль –
математическое образование)» механико-математического факультета

Ерекешевой Асели Галямжановны

Научный руководитель
к.п.н., доцент

И.К. Кондаурова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент

И.К. Кондаурова

Саратов 2016

Введение. В современных условиях, когда наблюдается возрастание интереса к реализации развивающих целей обучения, а число часов, отводимых на изучение математики в школе, снижается, со всей остротой встают вопросы поиска эффективных способов организации каждого звена процесса обучения, осуществляемого на занятиях и во внеурочное время. Указанное положение относится и к такому аспекту методической работы, как преодоление и предупреждение математических ошибок школьников.

В литературе имеется достаточно исследований, посвященных проблеме работы с математическими ошибками. В них представлены различные типологизации математических ошибок (М. П. Зайкин, З. И. Слепкань и др.), проанализированы причины их возникновения (Я. И. Груденов, В. И. Рыжик и др.), разработаны подходы к построению систем упражнений на предупреждение ошибок (Ю. М. Колягин, В. И. Крупич, Г. И. Саранцев и др.), описаны приемы познавательной деятельности школьников при работе с ошибками (С. И. Векслер и др.), охарактеризованы возможные направления работы по предупреждению математических ошибок (А. Пардала, Э. Свобода, А. Чаланов и др.) и др. Указанные труды содержат ценные рекомендации по совершенствованию отдельных аспектов работы с математическими ошибками. Однако ошибки по-прежнему продолжают «наводнять» ученические тетради по математике. Они представляют собой свидетельство недостаточного совершенства используемых учителями методик. Быстрое устранение ошибок – необходимое, но недостаточное условие педагогики гуманизма в обучении математике. Гораздо гуманнее своевременное предотвращение ошибок. Противоречие между потребностью школьной практики в совершенствовании методической работы с математическими ошибками и ее фактическим состоянием определяет актуальность темы работы.

Цель работы: теоретическое обоснование, разработка и практическая проверка методического обеспечения работы по преодолению и предупреждению математических ошибок школьников.

Задачи работы:

1. На основе теоретико-методологического анализа психолого-педагогической и методико-математической литературы уточнить содержание основных понятий и закономерностей, используемых при организации методической работы с математическими ошибками школьников.

2. Проанализировать различные подходы к описанию и упорядочению многообразия математических ошибок школьников.

3. Конкретизировать выделенные З. И. Слепкань на основе деятельностного подхода типы математических ошибок школьников, составив «ошибковедение» по курсу математики.

4. Подобрать, адаптировать и экспериментально апробировать методические приемы преодоления и предупреждения математических ошибок школьников на уроках и во внеурочное время.

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, методико-математической литературы; обобщение опыта работы учителей; разработка и апробация методических материалов; педагогический эксперимент.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Теоретические аспекты методической работы с математическими ошибками школьников»; «Практические аспекты методической работы с математическими ошибками школьников»); заключение; список использованных источников; приложения.

Основное содержание работы. Первая глава «Теоретические аспекты методической работы с математическими ошибками школьников» посвящена решению первой и второй задач выпускной квалификационной работы. Проведенный теоретико-методологический анализ психолого-педагогической и методико-математической литературы позволил нам уточнить содержание некоторых основных понятий и закономерностей, используемых при организации методической работы с математическими ошибками школьников. Сущность математической ошибки – некоторое объективное условие, требование, правило и т.п., которое нарушено или не соблюдено. Причина появления ошибки – субъективные ситуации, состояние или процессы,

свойственные интеллектуальной сфере человека, которые повлекли данное нарушение или несоблюдение. Психологический анализ математических ошибок школьников предполагает выявление механизма возникновения той или иной ошибки в рамках какой-либо психологической позиции усвоения знаний, формирования умений и навыков, в то время как методический анализ имеет целью демонстрацию ошибки, выявление ее математической сущности, указание возможных причин появления и характеристику сферы возможных ее проявлений. В первой главе работы рассматривается также психологический анализ природы типичных математических ошибок с позиции ассоциативно-рефлекторной теории научения, представленный в работах П. А. Шеварева: изучены некоторые понятия (ассоциация; обобщенная ассоциация; ошибочная ассоциация) и четыре закономерности теории обобщенных ассоциаций, непосредственно связанные с темой бакалаврской работы.

Далее в первой главе проанализированы различные подходы к описанию математических ошибок школьников: предметный (сущность ошибки: В. И. Рыжик, Н. Н. Зильбельберг); причинный (причина возникновения ошибки: А. Пардала, Э. Свобода); потемный (учебная тема, при изучении которой появляются ошибки: П. В. Прочухаев); деятельностный (вид учебно-познавательной деятельности, при выполнении которой допускаются ошибки: З. И. Слепкань, В. А. Колосова); количественный (число учащихся, допустивших ошибку: Д. С. Ангелов); принцип устойчивости (А. К. Артемов) и охарактеризована типология математических ошибок школьников на основе деятельностного подхода (по З. И. Слепкань): вычислительные ошибки, ошибки в математических записях, речевые ошибки (погрешности), ошибки в преобразованиях, ошибки в геометрических построениях и измерениях, ошибки при решении текстовых задач, логические ошибки, ошибки при решении уравнений и неравенств, ошибки в математических формулах.

Вторая глава работы посвящена практическим аспектам методической работы с математическими ошибками школьников. В главе конкретизированы выделенные З. И. Слепкань типы математических ошибок школьников, на их

основе составлено и частично апробировано «ошибковедение» по курсу математики. Мы не претендуем на полное описание «ошибковедения». В выпускной квалификационной работе разработаны лишь его самые общие основы: описаны некоторые наиболее распространенные, устойчивые математические ошибки школьников, указана их математическая сущность, возможные причины и сферы проявления, также мы попытались проиллюстрировать выделенные типы ошибок конкретными примерами. Укажем некоторые из них.

I. Вычислительные ошибки.

1. Неправильное сложение, вычитание и умножение дробных чисел.
2. Ошибки, связанные с возведением в степень положительных и отрицательных чисел.

3. При извлечении корней из числовых выражений учащиеся допускают такие ошибки: $\sqrt{0,9} = 0,3$; $\sqrt{25,36} = 5,6$; $\sqrt{11} = 3\sqrt{2}$ (формальное извлечение квадратного корня из целой и дробной части в отдельности в первых двух случаях и выделения из первой числа 9, из которого извлекается корень, – в третьем) и др.

II. Ошибки в математических записях.

III. Речевые ошибки (погрешности).

1. Двусмысленность слов. Каждое понятие в математике обозначается особым термином. В случае, когда один и тот же термин употребляется в разных смыслах, необходимы специальные указания, в каком именно смысле здесь употреблен данный термин, если это неясно из самого контекста. Например, квадрат как показатель степени и геометрическая фигура или корень в смысле решения уравнения и как синоним слова «радикал».

2. Двусмысленность произношения. Здесь речь идет об искажении первоначального смысла фразы из-за измененной постановки ударения в каком-нибудь слове.

3. Двусмысленность конструкции. Имеется в виду такая конструкция предложения, которая допускает разное восприятие его смысла.

Пример. Сколько будет трижды три и семь? Со смыслом этой фразы согласуются два различных, друг друга исключаящих, порядка действий, а именно: $3 \cdot 3 + 7$ и $3 \cdot (3 + 7)$.

3. Ошибка распределения имеет место, когда термину, употребленному в собирательном смысле, придается значение разделительного.

4. Ошибка составления (противоположная предыдущей) возникает тогда, когда термину, употребленному в разделительном смысле, придается значение собирательного.

Пример. Все углы треугольника меньше двух прямых углов. Здесь слово «все» употреблено в смысле «каждый». Однако выбор термина нельзя признать удачным, так как его можно понимать в смысле «сумма». Мысль для системы евклидовой геометрии становится абсурдной: «Сумма углов треугольника меньше двух прямых углов».

IV. Ошибки в преобразованиях.

1. Неправильное раскрытие скобок:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 2x - 1 = 0.$$

2. При переносе слагаемого в другую часть уравнения или неравенства не сменили его знак на противоположный:

$$x^4 - 2x^3 - 2x = 1 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0.$$

3. Неправильное приведение подобных слагаемых:

$$x^4 - 2x^3 + x - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^3 + x - 1 = 0.$$

4. Перенос переместительного закона умножения или распределительного закона умножения относительно сложения на другие действия и преобразования: $n^m = m^n, (a + b)^2 = a^2 + b^2$.

5. Ошибочное установление аналогии между объектами внешне

сходными, но по сути различными: $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} \rightarrow \frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$.

6. Неправильный порядок действий: $24^k : 8 = 3^k$.

7. Перепутаны степень и коэффициент: $b + b + b = b^3$, $b \cdot b \cdot b = 3b$.

8. Неправильно перемножены многочлены и одночлены:
 $2c^3b \cdot 3c^3b = 6c^3b$, $(3ac + 2d)(a^2 + 4d^3) = 3a^3c + 8d^4$.

9. Неправильно поделены многочлены и одночлены: $9xy^2 : 3xy^2 = 3xy^2$,
 $(a^3 + b^3) : (a^2 + b^2) = a + b$.

10. Неправильное разложение на множители: $2a^3b + ab + a = a(2a^2b + b)$.

11. Неправильные тождественные преобразования иррациональных выражений: $\sqrt{6a^2} = 3a^2$, $\sqrt[3]{4\sqrt{b}} = \sqrt[7]{b}$, $\sqrt{2ab} + \sqrt{3ab} = \sqrt{5ab}$,

$$\sqrt{\sqrt{b}\sqrt{c}} = \sqrt[8]{bc}, \quad \sqrt{ax(b+d)^2} = b + d\sqrt{ax}.$$

V. Ошибки в геометрических построениях и измерениях. При выполнении рисунка пространственной фигуры, то есть при проектировании ее на некоторую плоскость. Ошибки, допускаемые учащимися при построении и использовании чертежей.

VI. Ошибки при решении текстовых задач.

Ошибки учащихся при решении задач на движение:

1. Неправильно введены неизвестные величины: введены неизвестные величины, с помощью которых невозможно или трудно получить ответ, или несоответствующие смыслу задачи.

2. Составлено уравнение (неравенство), связывающее неизвестные величины с заданными величинами, несоответствующее условиям задачи: первый из A в C прошел на 12 км меньше, чем второй из B в C ...
 $\Rightarrow AC - 12 = BC$.

3. При решении полученных уравнений (неравенств) допущены ошибки, рассмотренные в предыдущих разделах.

4. Отобранные решения не соответствуют смыслу задачи:

Ответ: $v_1 = -\frac{3}{5}$, $v_2 = \frac{4}{5}$, $S = \frac{12}{5}$, где v_1, v_2 – скорости.

5. Неправильно поняты термины «позже», «раньше» и др.

6. Неправильно применены формулы средней скорости, пути и др.

VII. Логические ошибки. Наиболее распространены ошибки школьников при решении логических задач: Постройте отрицания высказываний с помощью слов «Неверно, что...», а затем запишите их в более простой форме.

VIII. Ошибки в математических формулах. Неверное применение формул сокращённого умножения и др.

Далее в главе рассматриваются некоторые традиционные (использование карточек для коррекции знаний; решение достаточного количества заданий, аналогичных тому, при решении которого была допущена ошибка) и нетрадиционные (игровые формы (в приложении А представлена методическая разработка игры-путешествия «В стране невыученных уроков» для учащихся 5 класса по теме: «Задачи на движение»); шестишаговый рефрейминг) приемы преодоления и предупреждения ошибок школьников.

Охарактеризуем подробнее прием «шестишаговый рефрейминг». Основная функция фреймов – помочь людям научиться переключать внимание: 1) с фрейма проблемы на фрейм результата, 2) с фрейма ошибки на фрейм обратной связи и 3) с фрейма невозможности на фрейм «как если бы». Формальный процесс шестишагового рефрейминга (В.С. Ковалев и др.):

Шаг 1. Определите поведение или реакцию, подлежащую изменению.

Шаг 2. Установите коммуникацию с частью, ответственной за проблемное поведение или реакцию (причину возникновения ошибки).

Шаг 3. Отделите позитивное намерение от поведения.

Шаг 4. Предложите учащимся выработать новые способы достижения цели.

Шаг 5. Произведите подстройку к будущему.

Шаг 6. Произведите экологическую проверку (то есть проверку результата).

Рассмотрим пример применения данной методики для ошибки «действия над логарифмами с разными основаниями, неумение использовать формулу

$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$. Незнание формулы $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ и её следствия

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, где $a > 0; b > 0; N > 0, a \neq 1; b \neq 1$.

Обычно в классе для определения указанной ошибки выполняется система упражнений на запоминание формулы:

1. Привести к общему основанию: а) $\log_x K$ к основанию 8; б) $\log_u V$ к основанию $\frac{1}{3}$; в) $\log_c D$ к основанию m .
2. $-2 \log_{5^2} 15 - \log_{2^2} 9$.
3. $\frac{\log_3 5}{\log_5 3}$.
4. $(\log_x 5 + 2) \cdot \log_{5^2} x = 1$.
5. Привести к общему основанию: $\log_{3x^2} (9x^4) - \log_{\frac{x^2}{3}} x^2$.

Используем фрейм результата. Внимание будет концентрироваться на необходимости получения верного результата. Особо следует оговорить условия, при которых формула верна. Внутри фрейма также можно использовать шестишаговый рефрейминг:

Шаг 1. Ошибка при использовании формулы $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ и её следствия $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Шаг 2. Вместе с учащимися выясняются причины возникновения ошибки.

Шаг 3. Указывается важность данной формулы при решении многих задач.

Шаг 4. Коллективно устанавливаются пути преодоления проблемы.

Шаг 5. По возможности, алгоритмизируем выбранную стратегию.

Шаг 6. Проверяем стратегию с помощью системы упражнений.

Если стратегия окажется неверной – возвращаемся к шагу 4.

Опытно-экспериментальная работа по проверке эффективности «ошибковедения», а также традиционных и нетрадиционных приемов работы с математическими ошибками школьников проводилась на базе МАОУ «Медико-биологический лицей» г. Саратова. В эксперименте приняли участие 12 учащихся 6 «В» (экспериментальная группа) и 12 учащихся 6 «Г» (контрольная группа) классов. Эксперимент проводился на материале учебных тем: «Сравнение положительных десятичных дробей», «Сложение и вычитание положительных десятичных дробей», «Умножение положительных десятичных дробей», «Деление положительных десятичных дробей», «Десятичные дроби и проценты». Уроки в 6 «Г» классе проходили традиционно. А учащиеся 6 «В» класса изучали новые темы с использованием составленного нами «ошибковедения», причем большинство заданий разбиралось на основе шестишагового рефрейминга. После изучения каждой темы учащимся обоих классов предлагалось выполнить проверочную работу (приложение Б реферируемой работы). Проверочные работы состояли из 6 заданий. При определении уровня обученности учитывалось время выполнения заданий, а за каждую допущенную ошибку налагался штраф, равный 30 секундам. Уровень обученности рассчитывался по формуле: $\alpha_i = 1 - \frac{t_i}{T}$, где t_i – время выполнения одного задания учащимся (сек), i – количество учащихся в подгруппе ($\overline{1,6}$), T – общее время выполнения работы, рассчитываемое по формуле: $T = t_i + \Delta t_i$. Результаты подсчетов уровня обученности учащихся контрольного и экспериментального классов, а также сравнительные графики роста обученности обоих классов приведены в приложении В.

Проведенная опытно-экспериментальная работа показала, что уровень обученности учащихся 6 «В» (экспериментального) класса превышает уровень обученности учащихся 6 «Г» (контрольного) класса. Отмеченный факт может служить подтверждением эффективности использованных в экспериментальной работе «ошибковедения», а также традиционных и нетрадиционных приемов работы с математическими ошибками школьников.

Заключение. Основные теоретические результаты. На основе теоретико-методологического анализа психолого-педагогической и методико-математической литературы уточнено содержание основных понятий (сущность математической ошибки; причина появления математической ошибки; психологический анализ математической ошибки; методический анализ математической ошибки) и закономерностей П.А. Шеварева, используемых при организации методической работы с математическими ошибками школьников. Проанализированы различные подходы к описанию многообразия математических ошибок школьников (предметный; причинный; потемный; деятельностный; количественный; принцип устойчивости) и охарактеризована типология математических ошибок на основе деятельностного подхода, выделенная З.И. Слепкань (вычислительные ошибки, ошибки в математических записях, речевые ошибки (погрешности), ошибки в преобразованиях, ошибки в геометрических построениях и измерениях, ошибки при решении текстовых задач, логические ошибки, ошибки при решении уравнений и неравенств, ошибки в математических формулах). Все выделенные типы ошибок проиллюстрированы большим количеством конкретных примеров.

Основные практические результаты. Разработано и частично апробировано методическое обеспечение работы с математическими ошибками школьников («ошибковедение», составленное на основе типологии З.И. Слепкань, включающие описание некоторых устойчивых математических ошибок, их методический анализ и характеристику сферы возможных проявлений; традиционные (использование карточек для коррекции знаний; решение достаточного количества заданий, аналогичных тому, при решении которого была допущена ошибка) и нетрадиционные (игровые формы; шестишаговый рефрейминг) приемы преодоления и предупреждения ошибок школьников на уроках и во внеурочное время). Проведенная опытно-экспериментальная работа подтвердила эффективность предложенного методического обеспечения работы с математическими ошибками школьников.