

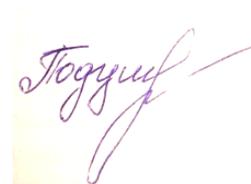
Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики её преподавания

**Изучение квадратного трехчлена в школьном курсе алгебры**  
**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 461 группы  
направления 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль –  
математическое образование) механико-математического факультета

Подушкиной Анастасии Сергеевны



Научный руководитель,  
к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

Т.А. Капитонова

Зав. кафедрой,  
к.п.н., доцент

\_\_\_\_\_

И.К. Кондаурова

Саратов 2016

**Введение.** В Примерной программе основного общего образования по математике конкретизируется содержание предметных тем образовательного стандарта. Программа определяет инвариантную часть учебного курса. В блок «Алгебра» включены следующие вопросы: «Многочлен...Разложение многочлена на множители. Квадратный трёхчлен. Выделение полного квадрата в квадратном трёхчлене. Теорема Виета. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители. Многочлены с одной переменной. Степень многочлена. Корень многочлена. Уравнение с одной переменной. Корень уравнения...Квадратное уравнение: формула корней квадратного уравнения. Квадратные неравенства...Числовые функции. Понятие функции. Область определения функции. Способы задания функции. График функции... Квадратичная функция, ее график, парабола. Координаты вершины параболы, ось симметрии».

Из представленной выписки из программы видим, что тема «Квадратный трёхчлен» находится на «стыке» трех основных содержательно-методических линий: линии тождественных преобразований, линии уравнений и неравенств и функционально-графической линии; то есть находит свое отражение в каждой из этих линий, что подчеркивает важность изучения этой темы в школьном курсе алгебры.

Задания по теме «Квадратный трёхчлен» регулярно включаются в материалы основного государственного экзамена (ОГЭ) и единого государственного экзамена. ОГЭ состоит из трех модулей: «Алгебра», «Геометрия», «Реальная математика». В модули «Алгебра» и «Геометрия» входят две части, соответствующие проверке на базовом и повышенном уровнях. Анализ результатов ОГЭ по математике в Саратовской области 2015 года показал, что только 20,6% учащихся полностью выполнили задания 1-8 первой части модуля «Алгебра» и 6,5% учащихся – задания высокого уровня сложности, куда относятся и задания по теме «Квадратный трёхчлен», т.е. многие учащиеся не справляются с заданиями по этой теме, что еще раз подчеркивает актуальность выбора темы выпускной квалификационной работы.

Исследованием квадратного трехчлена занимались многие математики и методисты: В. Г. Болтянский, М. И. Башмаков, М. Я. Выготский, В. С. Крамор, П. И. Горнштейн, Б. И. Полонский, М. И. Шабунин, В. В. Корчагин, А. Р. Рязановский, И. В. Ященко и др.

Цель работы: исследовать квадратный трехчлен в рамках трех основных содержательно-методических линий школьного курса алгебры: линии тождественных преобразований, линии уравнений и неравенств, функционально-графической линии.

Задачи работы:

1. Проанализировать учебную и методическую литературу для выявления содержания в ней материалов по теме «Квадратный трехчлен» в школьном курсе алгебры.

2. Исследовать квадратный трехчлен с трех точек зрения:

– квадратный трехчлен как многочлен второй степени с одной переменной;

– квадратичная функция, ее свойства и график;

– решение квадратных уравнений и неравенств.

3. Разработать методические рекомендации по изучению темы «Квадратный трехчлен» в основной школе.

Методы исследования: изучение нормативных документов; анализ учебно-методической и математической литературы; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Математическое содержание темы «Квадратный трехчлен» в школьном курсе алгебры»; «Методические рекомендации по изучению квадратного трехчлена в основной школе»); заключение, список использованных источников.

**Основное содержание работы.** Первая глава «Математическое содержание темы «Квадратный трехчлен» в школьном курсе алгебры» была посвящена решению первой и второй задачи выпускной квалификационной работы.

Проанализировав следующую учебную и методическую литературу (В. Г. Болтянский, М.И. Башмаков, М. Я. Выготский, В. С. Крамер, В. В. Корчагин, А. Р. Рязановский, И. В. Яценко и др.), мы рассмотрели три различных аспекта темы «Квадратный трехчлен»:

I. Квадратный трехчлен как многочлен второй степени с одной переменной.

Определение 1. Многочленом степени  $n$  от  $x$  называется выражение вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – некоторые числа, называемые коэффициентами многочлена ( $a_0 \neq 0$ ), а  $x$  – символ, вместо которого мы можем подставить любое число.

Определение 2. Квадратным трехчленом относительно  $x$  называется многочлен вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где  $a, b, c$  – некоторые числа, причем  $a \neq 0$ . Числа  $a, b, c$  называются коэффициентами квадратного трехчлена. В дальнейшем будем предполагать, что  $a, b, c$  – действительные числа.

Теорема 1. Квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  с действительными коэффициентами  $a, b, c$ , где  $a \neq 0$ , всегда имеет два корня, определяемых по формулам. Эти корни:

- 1) действительны и различны, если  $D > 0$ ;
- 2) действительны и совпадают, если  $D = 0$ ;
- 3) не являются действительными и будут комплексно сопряженными при  $D < 0$ .

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

где  $D = b^2 - 4ac$ .

Эти формулы называют формулами Виета. С их помощью можно получить разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

II. Квадратичная функция. Свойства и график квадратичной функции.

Квадратный трехчлен тесно связан с квадратичной функцией.

Определение 3. Функция вида  $y = ax^2 + bx + c$ ,

где  $a, b, c$  – действительные числа, причем  $a \neq 0$ , называют квадратичной функцией. Область определения квадратичной функции является все множество действительных чисел.

Теорема 3. Если  $D < 0$ , то при всех действительных значениях  $x$  знак квадратного трехчлена (19) совпадает со знаком числа  $a$ .

Теорема 4. Если  $D = 0$ , то при всех действительных значениях  $x$ , кроме  $x = \frac{-b}{2a}$ , знак квадратного трехчлена ( совпадает со знаком числа  $a$ , при  $x = \frac{-b}{2a}$  трехчлен обращается в ноль.

Теорема 5. Если  $D > 0$ , то знак квадратного трехчлена:

1) совпадает со знаком числа  $a$  для всех  $x$ , лежащих вне отрезка  $[x_1, x_2]$ , где  $x_1$  и  $x_2$  – корни квадратного уравнения.

2) знак квадратного трехчлена противоположен знаку числа  $a$  для всех  $x$ , заключенных между корнями трехчлена:  $x_1 < x < x_2$ .

3) при  $x = x_1$  и  $x = x_2$  трехчлен обращается в ноль.

Данные выше теоремы подробнее рассмотрим на рисунке 1.

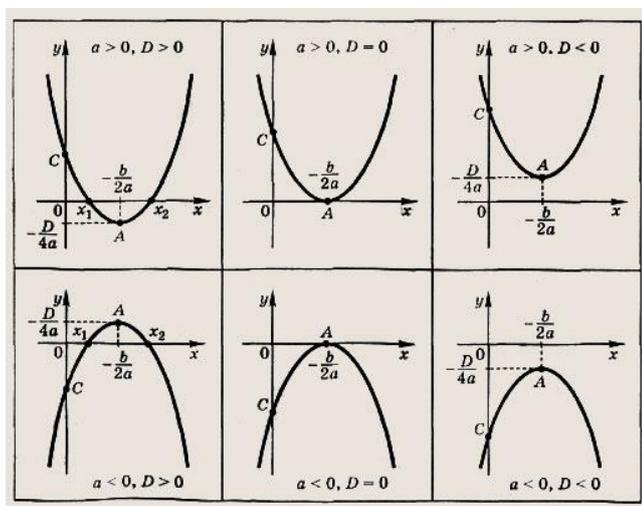


Рисунок 1 – График квадратичной функции

### III. Решение квадратных уравнений и неравенств.

Определение 4. Уравнение, в котором левая часть есть многочлен второй степени относительно неизвестного, а правая часть равна нулю, называется квадратным.

Общий вид квадратного уравнения:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0.$$

Числа  $a, b$  и  $c$  называются коэффициентами квадратного уравнения; из них  $a$  – первый коэффициент, или коэффициент при старшем члене,  $b$  – второй коэффициент, или коэффициент при неизвестном в первой степени,  $c$  – свободный член.

Определение 5. Число  $x_0$ , обращающее квадратный трехчлен в нуль, называется корнем квадратного трехчлена, а также и корнем квадратного уравнения.

Определение 6. Квадратное уравнение, у которого первый коэффициент равен 1, то есть уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0,$$

называется приведенным квадратным уравнением, формула корней которого имеет вид:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Уравнение с четным коэффициентом при  $x$  имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Для коэффициентов и корней квадратного уравнения выполняются соотношения:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Эти соотношения называют теоремой Виета (по имени французского математика Ф. Виета).

Определение 7. Если в квадратном уравнении один из двух коэффициентов  $b = 0$  или  $c = 0$ , или оба одновременно равны нулю, то квадратное уравнение называется неполным.

Возможны три типа неполных квадратных уравнений:

1)  $ax^2 + bx + c = 0$ , при  $a \neq 0$  имеет два корня:

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}.$$

2)  $ax^2 + c = 0$ , при  $a \neq 0$ ,  $x$  имеет два действительных значения, противоположных по знаку:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

3)  $ax^2 = 0$  ( $a \neq 0, b = c = 0$ ). Если число 0 является двукратным корнем уравнения  $ax^2 = 0$ , то есть  $x_1 = x_2 = 0$ .

Определение 8. Уравнение четвертой степени, содержащее только четные степени неизвестного, называется биквадратным. Общий вид такого уравнения:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Определение 9. Неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0,$$

где — действительные числа,  $a \neq 0$ , будем называть квадратным неравенством.

Определение 10. Два квадратных неравенства будем называть равносильными, если эти неравенства имеют одни и те же решения.

Определение 11. Уравнение (неравенство) с параметрами — это уравнение (неравенство), в котором встречаются два вида символов: неизвестные или переменные и параметры.

Определение 12. Параметры — это переменные  $a, b, c, d, \dots, k, l, m, n$ , которые при решении уравнения или неравенства считаются постоянными, их значение считается фиксированным.

Во второй главе «Методическое обеспечение процесса изучения квадратного трехчлена в основной школе» в ходе анализа содержания учебников «Алгебра – 7», «Алгебра – 8» и «Алгебра – 9», (авторы: Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И., Суворова С. Б.) определено место темы «Квадратный трехчлен» в школьном курсе алгебры, рассмотрены виды заданий по данной теме, включенные в учебники (задания обязательного уровня; задания повышенной трудности; задания на повторение) и представленные в учебниках типы заданий.

Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования установлены следующие требования к предметным результатам изучения предметной области «Математика и информатика», включающей в себя четыре модуля: математика, алгебра, геометрия, информатика.

Предметные результаты изучения предметной области «Алгебра» должны отражать:

- овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

- овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей.

Изучение арифметики служит фундаментом для систематического изучения учащимися курса «Алгебра» и смежных дисциплин, способствует развитию не только вычислительных навыков, но и логического мышления, формированию умения пользоваться алгоритмами, способствует развитию умений планировать и осуществлять деятельность, направленную на решение

задач, а также приобретению практических навыков, необходимых в повседневной жизни.

Содержание школьного курса «Алгебра» способствует формированию у учащихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчеркивает значение математики как языка для построения математических моделей процессов и явлений реального мира.

Развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики, и овладение навыками дедуктивных рассуждений также являются задачами изучения алгебры. Преобразование символьных форм вносит специфический вклад в развитие воображения учащихся, их способностей к математическому творчеству. В основной школе материал группируется вокруг рациональных выражений.

Содержание раздела «Функции» нацелено на получение школьниками конкретных знаний о функции как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов. Изучение этого материала способствует развитию у учащихся умения использовать различные языки математики (словесный, символический, графический), вносит вклад в формирование представлений о роли математики в развитии цивилизации и культуры.

Рассмотрение темы «Квадратный трехчлен» начинается с изучения темы «Многочлен» в 7 классе, продолжается в 8 классе при изучении тем «Квадратный трехчлен» и «Квадратные уравнения» и завершается изучением тем «Квадратные неравенства» и «Квадратичная функция» в 9 классе.

В ходе анализа содержания школьных учебников было выявлено, что в них содержатся: дополнительные упражнения к каждой из основных глав, задания повышенной трудности, исторические сведения, сведения из предыдущего курса математики, список дополнительной литературы, предметный указатель, ответы.

Теоретическое содержание рассмотренных нами школьных учебников охватывает все стороны темы «Квадратный трехчлен». Задачный материал также представлен в достаточном объеме. Но формулировка заданий, используемая в проанализированных учебниках стандартная: «решить квадратное уравнение», «решить квадратное неравенство», «построить график функции» и др.

Анализ методических пособий для подготовки к ОГЭ показал, что формулировка заданий чаще всего нестандартна, что вызывает затруднения у учащихся при выполнении заданий ОГЭ. Например,

Задание 1. Постройте график функции  $y = |x^2 + 3x + 2|$ . Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс.

Задание 2. Постройте график функции  $y = |x^2 - x - 12|$ . и определите, при каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = a$  имеет с графиком три или более общих точек.

Задание 3. График квадратичной функции проходит через точки А (2;0), В (-4;0) и С (-1;18). Напишите формулу, задающую эту функцию.

Задание 4. Найти все пары чисел  $x$  и  $y$ , для которых верно неравенство  $(x^2 + 6x + 12)(y^2 - 4y + 8) \leq 12$ .

Возникает необходимость рассмотрения заданий всевозможных типов на уроках алгебры 7-9 классов.

В бакалаврской работе рассмотрены и решены различные задания по теме «Квадратный трехчлен».

**Заключение.** Основные результаты, полученные при написании выпускной квалификационной работы.

1. Анализ примерной программы основного общего образования показал, что тема «Квадратный трехчлен» находится на «стыке» трех основных содержательно-методических линий: линии тождественных преобразований,

линии уравнений и неравенств и функционально-графической линии, то есть находит свое отражение в каждой из этих линий.

2. Анализ учебников «Алгебра – 7», «Алгебра – 8» и «Алгебра – 9» показал, что основные аспекты темы «Квадратный трехчлен» изучаются в курсе алгебры 8 и 9 классов.

3. Анализ методической литературы показал, что задания по теме «Квадратный трехчлен» регулярно включаются в государственную итоговую аттестацию, но итоги ОГЭ показывают, что учащиеся испытывают трудности при решении заданий по этой теме, что требует при ее изучении целостного подхода.

4. Рассмотренные нами задания нацелены на реализацию целостного подхода при изучении темы «Квадратный трехчлен».

Представленные в бакалаврской работе методические материалы могут быть полезны учителям при изучении темы «Квадратный трехчлен».

Список использованных источников состоит из 20 наименований.