Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ В ЗАДАНИЯХ ОГЭ И ЕГЭ

МАГИСТРСКАЯ РАБОТА

автореферат

студентки 3 курса 322 группы
направления **44.04.01 Педагогическое образование**
Механико-математического факультета
Карпенко Елены Ивановны

Научный руководитель
Доцент кафедры математического анализа ___________ А.М. Захаров
подпись, дата

Зав. кафедрой
Профессор, доктор _____________ Д.В.Прохоров
подпись, дата

Саратов - 2016

Выпускная квалификационная работа магистра представляет собой разработку электронного образовательного курса «Арифметическая и геометрическая прогрессии в системе ГИА». Данный образовательный курс предназначен для учащихся 9 – 11-х классов основного общего образования, и содержит элементы, относящиеся к обучению на базовом уровне и профильном уровне.

Электронный образовательный курс «Арифметическая и геометрическая прогрессии в системе ГИА» – это электронный ресурс, который содержит полный комплекс учебно-методических материалов, необходимых для освоения данной темы согласно учебному плану в рамках образовательной программы, и обеспечивает все виды работы в соответствии с программой дисциплины, включая практикум, средства для контроля качества усвоения материала, методические рекомендации для обучающегося по изучению данной темы.

Цели создания электронного образовательного курса:

- повышение качества обучения при реализации образовательных программ с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

- оптимизация деятельности педагогического состава, работающего с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий;

- создание электронной информационно-образовательной среды, позволяющей осуществлять индивидуальный подход в образовательном процессе.

Задачи создания электронного образовательного курса:

- соответствие единым требованиям к структуре, отдельным элементам ЭОК и технологиям обучения по нему в системе дистанционного образования Ipsilon;

- обеспечение образовательного процесса учебно-методическими и контрольно измерительными материалами по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии в системе ГИА», реализуемой в системе дистанционного образования Ipsilon;

- постоянное совершенствование и обновление комплекса учебно-методических материалов по данной теме.

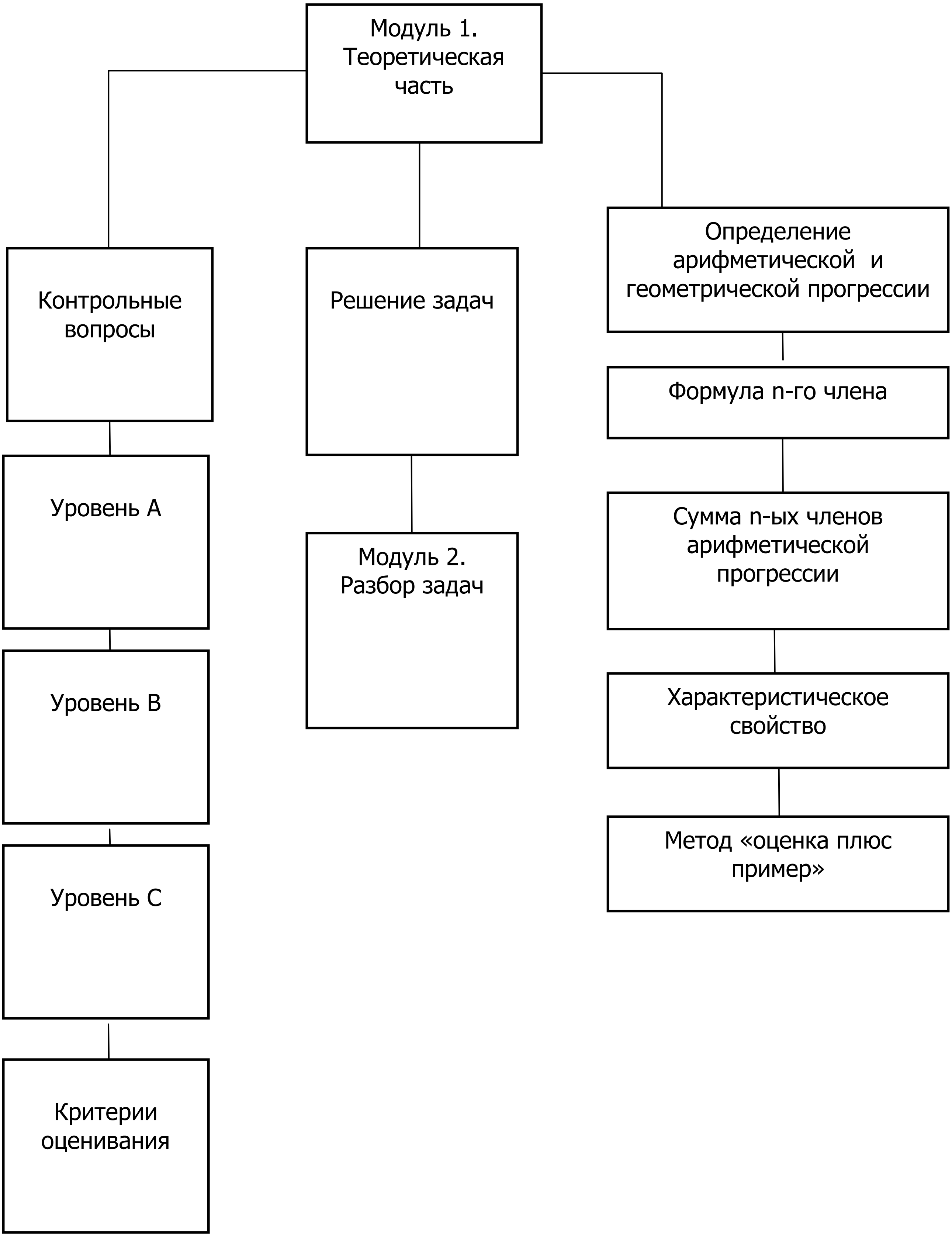
Тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии в системе ГИА» в курсе алгебры средней школы изучается обособленно, лишь в девятом классе, мало перекликаясь с другими разделами школьной программы. Но несмотря на это задачи, для решения которых необходимо знать не только формулы n-го члена и суммы первых n членов, но и свойства арифметической и геометрической прогрессий, предлагаются на ЕГЭ и на вступительных экзаменах в вузы. А для того, чтобы знания ученика были на достаточно высоком уровне, необходимо активизировать его познавательную деятельность при изучении прогрессий. Поэтому теоретические и практические исследования по данной теме представляются актуальными в настоящее время и обусловлены насущными потребностями средних школ различного уровня: как общеобразовательных, так и с математическим уклоном.

В работе объектом исследования является процесс обучения алгебре в средней школе.

Предметом исследования выступает методика изучения прогрессий и ее применение в средней общеобразовательной школе.

Практическая значимость работы определяется тем, что она может быть использована в качестве научно-методического пособия, которое поможет в преподавании темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии в системе ГИА» в курсе алгебры средней общеобразовательной школы, а также в подготовке учащихся к сдаче ЕГЭ и вступительных экзаменов в вузы.

Работа состоит из введения, теоретического материала и разработанных заданий.



Критерии выставления баллов:

За правильный ответ на устный вопрос –1б
За правильный ответ задания из уровня А – 1 б

За правильный ответ задания из уровня В – 2 б

За правильный ответ задания из уровня С – 3 б
Максимальное количество баллов – 35 = 100 %

Критерии выставления оценок:

Оценка «5» - от 80 до 100 % - от 28 до 35 б

Оценка «4» - от 70 до 80 % - от 24 до 28 б

Оценка «3» - от 60 до 70 % - от 21 до 24 б

Оценка «2» - до 60 % - до 21 б

Работа прошла апробацию в МОУ «СОШ №40».

По результатам выполнения выпускной квалификационной работы магистра на сайте http://ipsilon-dev.sgu.ru/ выставлены:

- теоретический материал по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии в системе ГИА»
- контрольные вопросы по теории с выбором ответа
- набор задач трёх уровней сложности.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Будем выписывать в порядке возрастания положительные четные числа. Первое такое число равно 2, второе 4, третье 6 и т.д. Получим последовательность 2, 4, 6, … .

Очевидно, что на четвертом месте этой последовательности будет число 8, на десятом - число 20 и т.д. Вообще для любого номера n можно указать соответствующее ему положительное четное число, оно равно 2n.

Рассмотрим еще одну последовательность. Будем выписывать в порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots.$$

Для любого номера n мы можем узнать соответствующую ему дробь; она равна $\frac{1}{n+1}$.

Числа, образующие последовательность, называют соответственно первым, вторым и т.д. членами последовательности. Члены последовательности обычно обозначают буквами с индексами, указывающими порядковый номер члена. Например, a_1, a_2, a_3 и т.д. (читают: "a первое, a второе, a третье " и т.д.). Вообще член последовательности с номером n, или, как говорят, n-й член последовательности, обозначают a_n. Саму последовательность будем обозначать так: (a_n).

Заметим, что последовательность может содержать конечное число членов. В таком случае её называют конечной. Примером конечной последовательности служит последовательность двухзначных чисел:

10; 11; 12; 13; ...; 98; 99. [1]

Чтобы задать последовательность, нужно указать способ, позволяющий найти член последовательности с любым номером.

Часто последовательность задают с помощью формулы, выражающей её n-й член как функцию номера n. Такую формулу называют формулой n-го члена последовательности. Например, последовательность положительных четных чисел можно задать формулой $a_n = 2n$, а последовательность правильных дробей с числителем, равным 1, - формулой $b_n = \frac{1}{n+1}$.

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Иначе говоря, последовательность (a_n) - арифметическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие:

$a_{n+1} = a_n + d$, (1)

где d - некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна d, т.е. при любом натуральном n верно равенство:

$a_{n+1} - a_n = d$.

Число d называют разностью арифметической прогрессии.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно указать первый её член и разность.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т. д. члены. Но для нахождения члена прогрессии с больший номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы.

По определению арифметической прогрессии

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Точно так же находим, что $a_6 = a_1 + 5d,\ a_7 = a_1 + 6d$, и вообще, чтобы найти a_n нужно к a_1 прибавить (n - 1)d, т. е.

$$a_n = a_1 + d(n-1). \quad (2)$$

Мы получили формулу n-го члена арифметической прогрессии. Докажем ее методом математической индукции.

1. При $n = 1$ эта формула верна: $a_1 = a$.

Предположим, что формула (2) верна при $n = k$, $k \geq 1$, т.е. $a_k = a_1 + d(k-1)$.

По определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$. Подставляя сюда выражение для k-го члена, получим $a_{k+1} = a_1 + d(k-1) + d = a + dk$, а это есть формула (2) при $n = k + 1$.

Из принципа математической индукции следует, что формула (2) верна для любого натурального n.

Что и требовалось доказать.

Формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$ можно записать иначе: $a_n = dn + (a_1 - d)$.

Отсюда ясно, что любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b - некоторые числа.

Верно и обратное: последовательность (a_n), заданная формулой вида $a_n = kn + b$, где k и b - некоторые числа, является арифметической прогрессией.

Действительно, найдем разность (n+1)-го и n-го членов последовательности (a_n):

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn+b) = kn + k + b - kn - b = k.$$

Значит, при любом n справедливо равенство $a_{n+1} = a_n + k$, и по определению последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. Заметим, что разность этой прогрессии равна k.

Свойства арифметической прогрессии.

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому его соседних членов, т.е. при $k \geq 2$ верной является формула

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \quad (3)$$

Действительно, при $k \geq 2$ имеем $a_k = a_{k-1} + d$ и $a_k = a_{k+1} - d$. Складывая почленно эти равенства, получим $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, откуда следует (3).

У конечной арифметической прогрессии $a_1; a_2; ...; a_n$ сумма членов, равноотстоящих от ее концов, равна сумме крайних членов, т.е. для $k = 1, 2, ... n$ верной является формула

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n \quad (4)$$

Действительно, в конечной арифметической прогрессии $a_1; a_2; ...; a_n$ члены a_k и a_{n-k+1} равноотстоят от концов. По формуле (2) $a_k = a_1 + d(k-1)$ и $a_{n-k+1} = a_1 + d(n-k).$ Сумма этих членов равна $a_k + a_{n-k+1} = 2a_1 + d(n-1)$ и равна сумме крайних членов $a_1 + a_n = 2a + d(n-1)$.

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов, т.е. если $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$, то

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (5)$$

Действительно, если

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$, то

$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$.

Складывая почленно эти равенства и используя свойство 2, получаем $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1} + ... + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$, откуда следует формула (5) [25].

Заметим, что если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то удобно пользоваться формулой суммы, представленной в другом виде. Подставим в формулу (5) вместо (a_n) выражение $a_1 + d(n-1)$, получим: $S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n-1))n}{2}$, т.е.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n. \quad (6)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Рассмотрим последовательность, членами которой являются степени числа 2 с натуральными показателями: 2; 2^2; 2^3; 2^4; … .

Каждый член этой последовательности, начиная со второго, получается умножением предыдущего члена на 2. Эта последовательность является примером геометрической прогрессии.

Определение. Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

Иначе говоря, последовательность (b_n) - геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняются условия:

$b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$, (1)

где q - некоторое число. Обозначим, например, через (b_n) последовательность натуральных степеней числа 2. В этом случае для любого натурального n верно равенство $b_{n+1} = b_n \cdot 2$; здесь $q = 2$.

Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена, начиная со второго, к предыдущему члену равно q, т.е. при любой натуральном n верно равенство: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$

Число q называют знаменателем геометрической прогрессии. Очевидно, что знаменатель геометрической прогрессии отличен от нуля.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно указать ее первый член и знаменатель.

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии, можно найти последовательно второй, третий, а также любой её член:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q)q = b_1 \cdot q^2,$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2)q = b_1 \cdot q^3,$$
$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 \cdot q^3)q = b_1 \cdot q^4.$$

Точно так же находим, что $b_6 = b_1 \cdot q^5$ и т. д. Вообще, чтобы найти (b_n), мы должны b1 умножить на q^{n-1}, т. е.

$b_n = b_1 q^{n-1}$. (2)

Мы получили формулу n-го члена геометрической прогрессии. Докажем ее методом математической индукции.

Формула (2), очевидно, верна при $n = 1$.

Предположим, что она верна и при $n = k, k \geq 1$, т.е. $b_k = b_1 q^{k-1}$.

Из (1) следует $b_{k+1} = b_1 q^k$, то есть формула (2) верна и при $n = k + 1$.

Из принципа математической индукции следует, что формула (2) справедлива для любого натурального п.

Что и требовалось доказать.

Свойства геометрической прогрессии.

1. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению соседних членов, то есть при $k \geq 2$ верной является формула

$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$. (3)

Если все члены геометрической прогрессии положительны, то это свойство формулируется так: каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому его соседних членов, т.е. $b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}$.

Действительно, при $k \geq 2$ имеем $b_k = b_{k-1} \cdot q$ и $b_k = b_{k+1} \cdot q^{-1}$. Перемножая почленно эти равенства, получим $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$. А это и есть равенство (3).

У конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, ..., b_n$ произведение членов, равноотстоящих от ее концов, равно произведению крайних членов, т.е.

$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$ (4)

Действительно, в конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, ..., b_n$ члены b_k и b_{n-k+1} равноотстоят от концов. По формуле (2) $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$ и $b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{n-k}$. Произведение этих членов $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1^2 \cdot q^{k-1+n-k}$ и равно произведению крайних членов $b_1 \cdot b_n = b_1^2 \cdot q^{n-1}$. Значит, $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$. А это и есть равенство (4).

Выведем теперь формулу суммы n первых членов произвольной геометрической прогрессии. Воспользуемся тем же приемом, с помощью которого была вычислена сумма S.

Пусть дана геометрическая прогрессия (b_n). Обозначим сумму n первых ее членов через S_n:

$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} + b_n$. (5)

Умножим обе части этого равенства на q: $S_n q = b_1 q + b_2 q + ... + b_{n-1} q + b_n q$.

Учитывая, что $b_1 q = b_2,\ b_2 q = b_3,\ ...,\ b_{n-1} q = b_n$, получим:

$S_n q = b_2 + b_3 + ... + b_n + b_n q$ (6)

Вычтем почленно из равенства (6) равенство (5) и приведем подобные члены: $S_n q - S_n = (b_1 q + b_2 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} + b_n)$,

$S_n q - S_n = b_n q - b_1$, $S_n (q-1) = b_n q - b_1$.

Пусть $q \neq 1$, тогда $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$. (7)

Мы получили формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, в которой $q \neq 1$. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену и $S_n = nb_1$ [25].

Заметим, что при решении многих задач удобно пользоваться формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии, записанной в другом виде. Подставим в формулу (7) вместо b_n выражение $b_1 q^{n-1}$. Получим:

$S_n = \dfrac{b_1 (q^n - 1)}{q-1}$, если $q \neq 1$. (8)

В результате проведения работы были решены все поставленные задачи, и, тем самым, достигнута основная цель.

Работа предназначена для начинающих учителей средних школ, желающих более детально познакомиться с методикой преподавания темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии», а также для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов, которым предстоит педагогическая практика.

В работе предлагаются

– теоретическая часть, подкрепленная примерами с подробным решением;

– методические рекомендации к изучению теоретического материала, урокам решения задач, а также к урокам повторения, обобщения, систематизации и проверке знаний по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии», позволяющие активизировать познавательную деятельность учеников.

Данная работа направлена на совершенствование учебного процесса, на применение на практике новых технологий обучения, основанных на принципах гуманизма, индивидуализации и дифференциации обучения и ориентированных на свободное развитие личности школьника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Г. Мордкович, Алгебра, 10 класс, учебник, 2012г.

2. И.В. Яковлев «Задача С6 на ЕГЭ по математике»

3. Азиев Н. Тема «Арифметическая и геометрическая прогрессии», 9 кл. // Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете Первое сентября. 2004. № 23. - с. 14-17.

4. Апанасов П.Т., Апанасов Н.П. Сборник математических задач с практическим содержанием. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1987.-110 с.

5. Борчугова З.Г., Батий Ю.Ю. Организация контроля знаний учащихся в обучении математике. Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1980. - 96 с.

6. Буренок И.И., Тубаева Л.И., Цедринский А.Д. Психолого-педагогические аспекты урока математики: учебно-методическое пособие // Под общей ред. проф. С. Г. Манвелова. Армавирский государственный педагогический институт, СФ АГПИ. - Славянск-на-Кубани, 2000. - 72 с.

7. Буряк В.К. Самостоятельные работы учащихся. Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1984. - 64 с.

8. Гиршович В.С. Виды самостоятельных работ // Математика в школе: научно-теоретический и методический журнал. 1998. № 3. - М.: ООО Школьная пресса. - С. 37-40.

9. Жохов В.И., Крайнева Л.Б. Уроки алгебры в 9 кл. Пособие для учителей к учебнику «Алгебра, 9» Макарычева Ю.Н. и др. под ред. Теляковского С.А. 2001. - М.: Вербум - М. - 160 с.

10. Инютина Е.В., Симонов А.С. Геометрическая прогрессия в экономике // Математика в школе: научно-теоретический и методический журнал. 2001. № 5. - М.: ООО Школьная пресса. - С. 18-21.

11. Казнев И. Релейный зачет с тестовыми заданиями по теме «Прогрессии» // Математика в школе: научно-теоретический и методический журнал. 2001. № 3. - М.: ООО Школьная пресса. - С. 39-42.