Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Восстановление производной функции, заданной с погрешностью

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
код и наименование направления(специальности)
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Бегинина Даниила Сергеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Г. В. Хромова
должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В. А. Юрко
должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение. В математике и ее приложениях постоянно приходится иметь дело с приближенными представлениями функций или с табличными значениями. В связи с этим постоянно разрабатываются различные аппараты приближения.

Пусть известны значения функции в точках и требуется вычислить производную. Одним из способов нахождения производных является построение интерполяционного многочлена, который в известных точках совпадает со значениями функции.

Точно так же мы можем заменять значения производных функций значениями производных других многочленов интерполяционного типа, например Бесселя.

К численному дифференцированию (ЧД) прибегают тогда, когда приходится вычислять производные для функций, заданных таблично, или когда непосредственное дифференцирование $y = f(x)$ затруднительно. Таким образом, простейшие формулы численного дифференцирования получаются в результате дифференцирования интерполяционных формул.

Другой способ построения формул численного дифференцирования, приводящий к тем же формулам, - это метод неопределенных коэффициентов.

Наиболее употребителен он в многомерном случае, когда не всегда просто выписывается интерполяционный многочлен. Коэффициенты формулы численного дифференцирования выбираются из условия, чтобы формула была точна для многочленов максимально высокой степени.

Цель бакалаврской работы заключается в изучении существующих методах аппроксимации производных, а также о методах решения задач, когда функция задана с погрешностью

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

В первом разделе рассмотрены основные классические методы аппроксимации производной функции с использованием интерполяционных многочленов и видов интерполяционных полиномов. Также в этом разделе рассматривается аппроксимирование функции $f(x)$ интерполяционном полиномом степени n. а также методов неопределенных коэффициентов.

Во втором разделе рассмотрены методы решения задачи восстановления производной функции, заданной с погрешностью. В работе рассмотрено два варианта решения задачи:

1. С использованием разностных методов,

2. Метод решения при помощи интегральных операторов.

В приложении приводится код программы и результаты численного эксперимента, согласно второму разделу.

Основное содержание работы. В первом разделе рассматриваются методы аппроксимации производной функции с использованием некоторых видов интерполяционных многочленов - сначала интерполяционным полиномом степени n:

$$f(x) \approx P_n(x),$$

где для k-той производной от функции $f(x)$ на отрезке интерполирования $[x_0, x_n]$ получим приближенную формулу:

$$\frac{d_k f(x)}{dx^k} \approx \frac{d^k P_n(x)}{dx^k}. \tag{1.3}$$

Затем рассматривается функция $f(x)$, заданная в виде таблицы с постоянным шагом $h = x_i - x_{i-1}(i = 1, 2, ..., n)$, может быть аппроксимирована интерполяционным многочленом Ньютона:

$$y \approx N(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Дифференцируя этот многочлен по переменной x с учетом правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dN}{dt},$$

можно получить формулы для вычисления производных любого порядка.

В работе рассматривается метод неопределенных коэффициентов, суть которого состоит в том, что коэффициенты $c_i, (i = \overline{0, n})$ в формуле численного дифференцирования

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) \tag{1.9}$$

выбираются из условия, чтобы формула была точна (знак $\approx$ переходил в знак равенства) для многочленов $Q_m(x)$ максимально высокой степени m, а также доказывается нижеследующая лемма.

Лемма. *Для каждого целого числа k и точки $y \in [a,b]$ существует и единственна формула численного дифференцирования (1.9) на $(n+1)$-м узле $a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$, точно вычисляющая k-ю производную в точке y:*

$$Q_n^{(k)} \approx \sum_{i=0}^{n} c_i Q_n(x_i)$$

для всех полиномов степени n.

Одним из важнейших критериев качества вычислений является точность результатов. Основной источник погрешности, возникающей при численном дифференцировании, связан с аппроксимацией функции $f(x)$.

При использовании интерполяционных полиномов для аппроксимации функции $f(x)$ имеем

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - ошибка интерполяции.

Следовательно, погрешность вычисления производной функции $f(x)$ по формуле (1.3) будет определяться производной от ошибки интерполяции

$$\frac{d^k R_n(x)}{dx^k}.$$

Анализ погрешности формул численного дифференцирования, опирающийся на непосредственно дифференцирование ошибки интерполяции $R_n(x)$ затруднен в силу математических сложностей. Поэтому в работе используется другой подход к анализу точности формул численного дифференцирования.

Прежде всего заметим, что все рассмотренные формулы для приближенного вычисления производной в конкретной точке имеют следующую структуру:

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} \approx \sum_i c_i y_i,$$

где c_i - постоянные коэффициенты, а суммирование производится по диапазону табличных данных.

Анализ погрешности сводится к замене всех входящих в правую часть значения y_i разложением $f(x)$ по формулам Тейлора относительно точки, для которой рассматривается приближение.

После проведения несложных арифметических преобразований в качестве главного члена правой части получим приближенное значение производной функции. Остальные же члены будут характеризовать погрешность.

Анализ остаточного члена нетривиален. Отметим, лишь, что погрешность аппроксимации при уменьшении шага h, как правило, уменьшается.

Рассмотренный пример позволяет также сделать вывод о том, что погрешность формул численного дифференцирования зависит от того, в какой точке вычисляется производная функции.

Другой источник погрешности численного дифференцирования связан с погрешностями вычисления значений функции y_i в узлах и с погрешностями округлений при проведении расчетов на компьютере.

Обусловленные этими причинами погрешности, в отличие от погрешности аппроксимации, возрастают с уменьшением шага h.

Действительно, если при вычислении значения функции $y = f(x)$ абсолютная погрешность равна d, то при вычислении дробей в (1.4) и (1.5) она составит $\frac{2d}{h}$.

Поэтому суммарная погрешность численного дифференцирования может убывать при уменьшении шага лишь до некоторого предельного значения, после чего дальнейшее уменьшение шага не повысит точности результата.

Следует отметить, что в целом приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование.

Во втором разделе рассматриваются численные методы решения задач восстановления непрерывной производной функции, заданной с погрешностью в C.

Пусть вместо $f(x)$, где $x \in [0,1]$, задана $f_\delta(x)$, такая что $\|f_\delta - f\|_C \leq \delta$.

Требуется по f_δ найти приближение к $f'(x)$ в каждой точке отрезка $[0,1]$.

По определению производной:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим оператор Δ_h:

$$\Delta_h f = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, a \le x \le a+\frac{h}{2}; \\ f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}), a+\frac{h}{2} < x < b-\frac{h}{2}; \\ \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, b-\frac{h}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Применим оператор Δ_h к функции f_δ и рассмотрим величину $|\Delta_h f_\delta - f'|$. Имеем:

$$|\Delta_h f_\delta - f'| = |\Delta_h f_\delta - \Delta_h f + \Delta_h f - f'|\,.$$

Очевидно, что

$$\Delta_h f_\delta - \Delta_h f' = \Delta_h(f_\delta - f)$$

Тогда по неравенству треугольника имеем:

$$|\Delta_h f_\delta - f'| \le |\Delta_h f_\delta - \Delta_h f| + |\Delta_h f - f'|$$

Теорема 1.

$$|\Delta_h f - f'| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Доказательство данной теоремы следует из определения производной.

Теорема 2. *Справедлива оценка*:

$$|\Delta_h(f_\delta - f)| \le \frac{2\delta}{h}$$

Чтобы $\Delta_h f_\delta$ служило приближением в f', согласуем разностный шаг h с погрешностью исходной фкнкции δ так, чтобы :

1. $h(\delta) \to 0$,
2. $\frac{\delta}{h(\delta)} \xrightarrow{h \to 0} 0$

Например, можно взять $h(\delta) = \sqrt{\delta}$

Тогда $|\Delta_h f_\delta - f'| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Если параметр h согласован с погрешностью δ так, что выполняются условия*

1. $h(\delta) \to 0$,
2. $\frac{\delta}{h(\delta)} \xrightarrow{h \to 0} 0$,

то $|\Delta_h f_\delta - f'| \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *для любого* $x \in [a,b]$

Также во втором разделе выпускной квалификационной работы рассмотрен метод решения задачи восстановления непрерывной производной функции, заданной с погрешностью в L_2.

Пусть теперь $\|f_\delta - f\|_{L_2} \le \delta$.

В этом случае предыдущий метод применять нельзя.

Тогда построим метод, основанный на интегральных операторах.

Возьмем интегральный оператор $T_\alpha f$:

$$T_\alpha f = a(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} (\alpha^2 - (t-x)^2) f(t) dt.$$

Выберем коэффициент $a(\alpha)$ такой, что $T_\alpha 1 \equiv 1$.

В таком случае:

$$a(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} (\alpha^2 - (t-x)^2) f(t) dt.$$

Сделаем замену:

$$t - x = \tau;$$

$$t = x - \alpha \to \tau = (-\alpha);$$

$$t = x + \alpha \to \tau = \alpha.$$

Таким образом, левая часть равенства примет вид:

$$a(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} (\alpha^2 - (t-x)^2) dt = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 - \tau^2) d\tau = 2 \int\limits_{0}^{\alpha} (\alpha^2 - \tau^2) d\tau \qquad (2.1)$$

Подставим результат интегрирования в (2.1) получим

$$a(\alpha) \frac{4\alpha^3}{3} = 1 \to a(\alpha) = \frac{3}{4\alpha^3}.$$

Выразим из полученных выражений $a(\alpha)$ и получим:

$$a(\alpha) \frac{4\alpha^3}{3} = 1 \to a(\alpha) = \frac{3}{4\alpha^3}.$$

Таким образом
$$\frac{3}{4\alpha^3}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)dt=1,$$
а оператор T_α имеет вид:
$$T_\alpha f=\frac{3}{4\alpha^3}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)f(x)dt.$$
Умножим обе части равенства на $f(x)$ и получим
$$f(x)=\frac{3}{4\alpha^3}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)f(x)dt, \tag{2.2}$$
Теорема 4: *Для любой непрерывной функции* $f(x)$
$$|T_\alpha f-f|\xrightarrow{\alpha\to 0}0$$
Теорема 5. *Справедлива оценка*
$$|T_\alpha(f_\delta-f)|\leq\sqrt{\frac{3}{5}}\alpha^{(-\frac{1}{2})}\delta.$$
Теорема 6. *Если* $\alpha=\alpha(\delta)$ *так, что*

1. $\alpha(\delta)\to 0$
2. $(\alpha(\delta))^{-\frac{1}{2}}\delta\to 0$ при $\delta\to 0$ для любого x из отрезка $[a+\epsilon,b-\epsilon]$, где $\epsilon>\alpha$,

то $\left|T_{\alpha(\delta)f_\delta}-f'\right|\to 0$ *при* $\delta\to 0$

Теперь рассматривается вопрос о решении задачи восстановления производной $f'(x)$ в случае, когда она непрерывна.

Рассмотрим функции $\frac{d}{dx}(T_\alpha f)$. Получим:
$$\frac{d}{dx}(T_\alpha f)=\frac{d}{dx}a(\alpha)\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(\alpha^2-(t-x)^2)f(t)dt.$$
Поскольку подстановка подынтегральной функции в точках $x-\alpha$ и $x+\alpha$

равны нулю, то

$$\frac{d}{dx}(T_\alpha f) \equiv T_\alpha^1 f = a(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \frac{d}{dx}(\alpha^2 - (t-x)^2) f(t)dt, \tag{2.3}$$

откуда

$$\frac{d}{dx}(T_\alpha f) \equiv a(\alpha) \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} 2(t-x)f(t)dt = \frac{3}{2\alpha^3} \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} (t-x)f(t)dt \tag{2.4}$$

Теорема 7. *Имеет место сходимость:*

$$\left|T_\alpha^1 f - f'\right| \xrightarrow{\alpha\to 0} 0.$$

Теорема 8. *Имеет место оценка:*

$$\left|T_\alpha^1 (f_\delta - f)\right| \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha^{-\frac{3}{2}} \delta$$

Теорема 9. *Для того, чтобы $T_\alpha^1 f_\delta \to f'$ при $\alpha \to 0$ и $\delta \to 0$, достаточно выбрать согласование такое, чтобы $\alpha = \alpha(\delta)$:*

1. $\alpha(\delta) \to 0$,
2. $\delta(\alpha(\delta))^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{\delta\to 0} 0$.

Задача, поставленная во втором разделе была рассмотрена более подробно при помощи программы, написанной на языке C++. Исходный код программы представлен в **приложении**.

На основе численного эксперимента в работе были построен график исходной функции $f(x) = x^2$, график для производной функции $f(x)$, заданный с погрешностью, и график восстановленной производной функции $f(x)$ при помощи интегрального оператора $T_\alpha f$.

Заключение. В работе был изучен вопрос об аппроксимации непрерывной производной функции $f(x)$, рассмотрен интегральный метод для восстановления непрерывной производной функции, заданной с погрешностью. Для получения результатов численного эксперимента использовался язык программирования C++. Были получены численные результаты в задаче восстановления производной функции $f(x) = x^2$ в случае, когда она задана с погрешностью в метрике пространства $L_2[0, 1]$.