Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Методы вычисления решений интегральных уравнений

Автореферат бакалаврской работы

студента 4 курса 411 группы направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика

код и наименование направления(специальности)

механико-математического факультета

наименование факультета, института, колледжа

Возлеева Дениса Алексеевича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., доцент Д.В. Поплавский

должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В. А. Юрко

должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Интегральными уравнениями называют уравнения относительно неизвестной функции, содержащейся под знаком определенного интеграла. Примером интегрального уравнения служит уравнение Абеля

$$\int_0^z \frac{\phi(\eta)}{\sqrt{z-\eta}} d\eta = f(z),$$

Общий вид интегральных уравнений:

$$x(t) = \int_D K(t, s, x(s))ds + f(t).$$

Рассмотрим один из основных типов линейных интегральных уравнений, а именно, линейные уравнения Фредгольма второго рода:

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + f(t).$$

Для интегральных уравнений Фредгольма первого рода:

$$\int_a^b K(t, s)x(s)ds = f(t).$$

Подобные уравнения, характеризующиеся отсутствием отдельного слагаемого $x(t)$ (не связанного интегралом), имеют более ограниченную сферу применения, так как являются наиболее типичными представителями так называемых некорректно поставленных (некорректных) задач.

Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, теоретической главы, программной части, заключения и списка использованных источников.

Глава 1

Интегральные уравнения Фредгольма второго и первого рода

Прежде, чем начать рассказывать о численных методах решения уравнений Фредгольма второго и первого рода, мы расскажем об особенностях уравнений Фредгольма первого рода. На их примере ознакомимся с классом задач, которые называются некорректными.

Задачи, не имеющие решения или имеющие неустойчивые, относительно входных данных, решения, называются некорректными или некорректно поставленными.

Уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K(x,s)\phi(s)ds = f(x). \tag{1.1}$$

является примером некорректно поставленной задачи.

Метод коллокации

Рассмотрим интегральное уравнение

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(x) = 0. \tag{2.1}$$

Ищем приближенное решение уравнения (2.1) в виде функции вида

$$Y_n = \Phi(x, c_1, c_2, ..., c_n) \tag{2.2}$$

Подставим выражение (2.2) в уравнение (2.1) и получим невязку

$$R[Y_n] = Y_n(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)Y_n(s)ds - f(x). \tag{2.3}$$

Если y - точное решение, то, очевидно, невязка $R[y] = 0$.

Перейдем теперь к конкретному методу построения приближенного решения Y_n. Пусть

$$Y_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x). \tag{2.4}$$

Подставим выражение (2.4) в левую часть уравнения (2.1) и получим невязку

$$R[Y_n] = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)[\phi_0(s) + \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(s)]ds.$$

Получаем алгебраическую линейную систему уравнений

$$\sum_{i=n}^{n} c_i \psi_i(x_j, \lambda) = -\psi_0(x_j, \lambda) \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{2.5}$$

Пусть $f(x) \equiv 0, \phi_0(x) \equiv 0, \lambda = \tilde{\lambda_k}$, то вместо системы (2.5) получаем однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^k \psi_i(x_j, \tilde{\lambda_k}) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{2.6}$$

Когда найдем ненулевые решения $\tilde{c}_i^k, (i = 1, 2, ..., n)$ системы (2.6), мы получим для ядра $K[x, s]$ приближенные собственные функции

$$\tilde{Y}_n^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^k \phi_i(x),$$

которые отвечают его собственному значению $\lambda_k \approx \tilde{\lambda_k}$.

Метод наименьших квадратов

Для уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds - f(x) = 0. \tag{3.1}$$

Аналогично методу коллокации, полагаем

$$Y_n(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x), \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в левую часть уравнения (3.1), получим невязку

$$R[Y_n] = \psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x, \lambda), \tag{3.3}$$

Согласно методу наименьших квадратов, коэффициенты $c_i (i = 1, 2, ..., n)$ отыскиваются из условия минимума интеграла

$$I = \int_a^b (R[Y_n])^2 dx = \int_a^b [\phi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda)]^2 dx. \qquad (3.4)$$

Благодаря этому требованию, приходим к алгебраической системе уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n). \qquad (3.5)$$

Отсюда на основании (3.4), дифференцируя по параметрам $c_1, c_2, ..., c_n$ под знаком интеграла, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_a^b \psi_j(x, \lambda)[\psi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^n c_i \psi_i(x, \lambda)]dx = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n). \qquad (3.6)$$

Введем сокращенные обозначения

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_a^b \psi_i(x, \lambda)\psi_j(x, \lambda)dx. \qquad (3.7)$$

Систему (3.6) можно записать в виде нормальной системы способа наименьших квадратов, из которой мы найдем приближенные собственные функции, если вместо λ подставим соответсвующее приближенное значение.

Метод вырожденных ядер

Определение Ядро $K(x, s)$ называется вырожденным, если его можно записать в виде конечной суммы парных произведений:

$$K(s, x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(s). \qquad (4.1)$$

Для таких ядер интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds \qquad (4.2)$$

решается достаточно просто. На самом деле, когда подставим выражение (4.1) в уравнение (4.2), получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x), \tag{4.3}$$

где

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4.4}$$

- некоторые постоянные коэффициенты. Если в выражение (4.4) подставить формулу (4.3), то в этом случае, для определения коэффициентов $c_i (i = 1, 2, ..., n)$ получим алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(s) ds \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

В силу (4.3), интегральное уравнение (4.2) имеет единственное решение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\triangle_{ij}(\lambda)}{\triangle(\lambda)} f_j \alpha_i(x). \tag{4.5}$$

Если в выражение (4.4) подставить формулу (4.3), то в этом случае, для определения коэффициентов $c_i (i = 1, 2, ..., n)$ получим алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(s) ds \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_{ji} = f_i, \tag{4.5}$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds. \tag{4.6}$$

Отсюда, когда подставим вместо f_i соответствующее выражение (4.6) и поменяем сумму интегралов на интеграл суммы, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\triangle(x,s,\lambda)}{\triangle(\lambda)} f(s)ds. \tag{4.7}$$

Из формулы (4.7) получаем, что функция

$$R(x,s,\lambda) = \frac{\triangle(x,s,\lambda)}{\triangle(\lambda)} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_j(s)\frac{\triangle_{ji}(\lambda)}{\triangle(\lambda)}. \tag{4.8}$$

Собственные значения ядра $K(x,s)$ определяются из уравнения

$$\triangle(\lambda) = 0. \tag{4.9}$$

Нетривиальные решения однородного уравнения

$$\tilde{y}(x) = \lambda_k \int_a^b K(x,s)\tilde{y}(s)ds$$

будут иметь вид

$$\phi_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i{}^{(k)} \alpha_i(x).$$

Если $\lambda = \lambda_k$ является собственным значением ядра $K(x,s)$, то неоднородное уравнение (4.2) либо не будет иметь решений, либо имеет бесконечно много решений.

Метод последовательных приближений

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)f(s)ds. \tag{5.1}$$

Решение мы будем искать в форме степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x). \tag{5.2}$$

Подставив (5.2)в уравнение (5.1) и прировняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \phi_0(x) = f(x) \\ \phi_n(x) = \int_a^b K(x,s)\psi_{n-1}(s)ds \quad (n = 1, 2, ...) \end{aligned}\right\}. \tag{5.3}$$

Приближенное решение интегрального уравнения (5.1) с погрешностью

$$E_n = |y(x) - y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda|^k |\phi_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} N[M(b-a)|\lambda|]^k = \frac{N[M(b-a)|\lambda|]^{n+1}}{1 - M(b-a)|\lambda|}. \tag{5.4}$$

Из формул (5.3)получается, что решение (5.2) можно записать так :

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(x,s) f(s)ds.$$

Коэффициенты $K_n(x,s)$, которые называются интегрированными ядрами, могут быть последовательно найдены по следующим формулам :

$$K_1(x,s) = K(x,s),$$

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt \quad (n = 2, 3, ...).$$

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s)ds. \tag{5.5}$$

Формула (5.5) даст решение интегрального уравнения (5.1) при любом $\lambda \neq \lambda_k (k = 1, 2, ...)$.

Метод конечных сумм

Данный метод основан на приближенном вычислении оперделенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i) + R[F], \tag{6.1}$$

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \quad (a \le x \le b). \tag{6.2}$$

на основании (6.1) имеем:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i + R_i, \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{6.3}$$

Для приближенных значений Y_i решения $y(x)$ в узлах $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ имеем линейную алгебраическую систему

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{6.4}$$

систему (6.4) мы можем записать в таком виде:

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda A_j K_{ij}) Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{6.4$'$}$$

Когда нашли $Y_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$, получаем из уравнения (6.2) для решения $y(x)$ приближенное аналитическое выражение

$$Y(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) Y_j. \tag{6.5}$$

Если $\tilde{Y}_{ik}^{l} (i = 1, 2, ..., n; k = 1, 2..., m; l = 1, , , p_k)$ - соответствующие ненулевые решения однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \tilde{\lambda}_k A_j K_{ij}) \tilde{Y}_{ik}^{l} = 0 \quad (i = 1, 2..., n), \tag{6.6}$$

то тогда собственные функции ядра приближенно будут определяться формулами

$$\tilde{\phi}_{kl}(x) = \tilde{\lambda}_k \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) \tilde{Y}_{jk} \quad (k = 1, 2, ..., m; l = 1, ..., p_k).$$

Метод конечных сумм можно применить также к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x).$$

В таком случае приближенные значения Y_i решения $y(x) \quad (a \leq x \leq b)$ в узлах $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ будут определяться с помощью системы

$$\lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} Y_j = f_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{6.7}$$

Программная часть

Задача 1

Программа IntEq решает уравнение Фредгольма второго рода вида

$$y(x) = \int_0^1 K(x,s)y(s)ds + f(x), \quad K(x,s) = \mathrm{sh}(x+s), \quad f(x) = x^2$$

Во всех случаях задача сводится к решению СЛАУ $Ax = b$.

Для инициализации СЛАУ (т.е., построения $Aиb$) используются функции :

void SLAECollocation(double**A,double*b,double*ap,double*am) - если используется метод коллокаций.

voidSLAELeastSquares(double**A, double*b, double*ap, double*am) - если используется метод наименьших квадратов.

voidSLAEDegKernel(double**A,double**b,double**ap,double**am) - если используется метод вырожденных ядер.

Задача 2

Программа IntEq1 решает уравнение Фредгольма первого рода вида

$$\int_0^1 K(x,s)y(s)ds = f(x),$$

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & x < s \\ s(1-x), & x > s, \end{cases}$$

$$f(x) = x - 2x^3 + x^4$$

Для решения используется метод коллокаций или метод наименьших квадратов, в зависимости от того, какую из строчек SLAECollocations или SLAELeastSquares раскомментировать.

Задача 3

Программа IntEq11 решает уравнение Фредгольма первого рода вида

$$\int_0^1 K(x,s)y(s)ds = f(x),$$

$$K(x,s) = \begin{cases} 0, & x < s \\ (x-s), & x > s, \end{cases}$$

$$f(x) = 0.1\sin^2(\pi x)$$

Для исследования устойчивости в правую часть введено возмущение вида $\epsilon \sin^2(m\pi x))$. В отличие от предыдущего случая, возмущение выбрано так, что оно не влияет на существование решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе был изучен вопрос численного решения интегральных уравнений Фредгольма первого и второго родов, а так же вопросы корректности и устойчивости этих уравнений.

В теоретическом блоке были изучены шесть методов численного решения интегральных уравнений. Каждый из методов был детально рассмотрен, а так же были приведены примеры для каждого из методов.

С практической точки зрения разработан программный продукт, позволяющий исследовать интегральные уравнения, в том числе на вопрос устойчивости решения. Были рассмотрены три задачи, в двух из которых рассматриваются интегральные уравнения первого рода, а в третьей - второго рода.