Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и

вычислительной математики

О нулях функции типа Миттаг-Леффлера

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления(специальности)

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Григорьева Андрея Владимировича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
Ст. преподаватель Советникова С.Ю.

должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Юрко В.А.

должность, уч. степень, уч. звание | подпись, дата | инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

Данная работа посвящена изучению некоторых свойств функции Миттаг-Леффлера.

Функция Миттаг-Леффлера играет важную роль в решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков. Многие специальные функции могут быть выражены через функцию Миттаг-Леффлера с различными параметрами. К таким функциям можно отнести гиперболический косинус и синус, функцию Миллера-Роса и другие.

Впервые упоминания о производных нецелого порядка встречается в 1695г. в переписке Лопиталя и Лейбница.

Первый шаг был сделан Л. Эйлером, 1738г., заметившим, что результату вычисления производной $\frac{d^p x^\alpha}{dx^p}$ от степенной функции можно придать смысл при нецелом p. П. Лаплас высказал идею о возможности дифференцирования нецелого порядка функций, представимых интегралом $\int T(t)t^{-x}dt$. В трактате С. Лякруа повторена мысль Л. Эйлера и уже приведена явная формула вычисления производной $\frac{d^{1/2}x^\alpha}{dx^{1/2}}$ от степенной функции.

Следующий шаг сделан Ж. Фурье, который предложил использовать равенство

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(tx - t\lambda + p\pi/2)dt \tag{1}$$

для определения производной нецелого порядка. Это было первое определение производной любого положительного порядка и от любой (достаточно "хорошей") функции.

В 1903 г. шведский математик Миттаг-Леффлер ввел в анализ новую (целую) функцию:

$$E_{1/p}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+np)}, p > 0.$$

Появление новой функции не осталось незамеченным. Уже в первых работах авторов интересовал вопрос распределения ее нулей. Так, Виман доказал, что при $p \geq 2$ все ее нули вещественны, отрицательны или простые. Позже Пойа с помощью другого приема передоказал этот факт для случая $2 \leq p \leq N$.

С течением времени функция $F_{1/p}(z)$ покоряла все новые позиции в теории фукций. Вместе с этим получило разумное расширение и само ее определение с помощью параметра μ. Расширение это состояло в переходе к более общей функции

$$E_{1/p}(z;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + \frac{n}{p})}, p > 0, \mu \in C, \tag{6}$$

которую мы будем также называть функций Миттаг-Леффлера ($E_{1/p}(z) = E_p(z;1)$).

Одно из важных направлений, связанных с функциями (1) —это теория интегральных преоб-разований типа Фурье—Лапласа с ядрами Миттаг-Леффлера. Вопрос о распределении нулей функции Миттаг-Леффлера является одним

из главных, в теории этих функций. Основанием для исследований в этом направлении служит уже сама обширность класса целых функций(1), обладающих значительным асимптотическим поведением. Но важно, что потребность в такой деятельности подкрепляется и различными аспектами спектральной теории, теории обратных задач, теории аппроксимации.
Наиболее активным потребителем (а можно даже сказать, и заказчиком) теории распределения нулей функций (1) служит та ветвь спектральной теории, в которой рассматриваются дифференциальные операторы с участием дробных производных.
Интересная связь между обратными задчами специального вида и распределением нулей функции $E_p(z;\mu)$ при определенных значениях пар параметров p, μ обнаружена Тихоновым.

Работа состоит из следующих разделов:

- Введение
- Краткая теория оператора дробного дифференцирования
- Асимптотические представления функции Миттаг-Леффлера
- Нули функции типа Миттаг-Леффлера
- Заключение
- Список использованных источников

Основное содержание работы.

1 Краткая теория оператора дробного дифференцирования

1.1 Определение дробных интегралов и производных и их простейшие свойства.

Определение 1. *Пусть $\phi(x) \in L_1(a,b)$. Интегралы*

$$(I_a^\alpha + \phi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\phi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \tag{2.2}$$

$$(I_b^\alpha - \phi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\phi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \tag{2.3}$$

где $\alpha > 0$ называются дробного порядка α. Первый из них называют иногда левосторонним, а второй - правосторонним. Операторы $I_{a+}^\alpha, I_{b-}^\alpha$ называют операторами дробного интегрирования. Таким образом, дробный интеграл - это конструкция, уже знакомая по уравнению Абеля.

Дробные интегралы (2.2), (2.3), очевидно, определены на функциях $\phi(x) \in L_1(a,b)$, существуя почти всюду.

Дробное интегрирование обладает свойством

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\phi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\phi, I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}\phi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \tag{2.6}$$

Определение 2.2. *Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, каждое из выражений*

$$(D_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{ft)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{2.7}$$

$$(D_{b-}^{\alpha}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^b \frac{ft)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \tag{2.8}$$

называется дробной производной порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$, соответсвенно левосторонней и правосторонней.

Дробные производные (2.7), (2.8) называют обычно производными Римана-Лиувилля.

Заметим, что дробные интегралы определены для любого порядка $\alpha > 1$, а дробные производные - пока только для порядка $0 < \alpha < 1$. Прежде чем перейти к случаю $\alpha \geq 0$, дадим простой достаточный признак существования дробных производных.

Лемма 2.1. *Если $f(x) \in AC([a, b])$, то функция $f(x)$ имеет почти всюду производные $D_{a+}^{\alpha}f$ и $D_{b-}^{\alpha}f, 0 < \alpha < 1$, причем $D_{a+}^{\alpha}f, \quad D_{b-}^{\alpha}f \in L_r(a, b), 1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$, и их можно представить так же в виде*

$$D_{a+}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int\limits_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{\alpha})}\right], \tag{2.9}$$

$$D_{b-}^{\alpha}f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int\limits_x^b \frac{f'(t)dt}{(t-x)^{\alpha})}\right], \tag{2.10}$$

1.2 Дробные интегралы и производные комплексного порядка.

Операциям дробного интегрирования $I_{a+}^{\alpha}, I_{b-}^{\alpha}$ и дробного дифференцирования $D_{a+}^{\alpha}, D_{b-}^{\alpha}$ можно придать смысл и при комплексных значениях α таких, что $Re\alpha > 0$.

В случае чисто мнимого порядка дробные производные, определенные, подобно (2.7), по формуле

$$D_{a+}^{i\theta}f = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (x-t)^{-i\theta}f(t)dt, \tag{2.22}$$

имеют смысл. Использовать же (2.2) для определенных дробных нтегралов чисто мнимого порядка нельзя ввиду расходимости интеграла при $\alpha = i\theta$.

Поэтому дробные интегралы чисто мнимого порядка принято определять как $I^{i\theta}_{a+}f = -\frac{d}{dx}I^{1+i\theta}_{a+}f$. Таким образом,

$$I^{i\theta}_{a+}f \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x (x-t)^{i\theta}f(t)dt, \tag{2.23}$$

$$I^{i\theta}_{b-}f \overset{def}{=} -\frac{1}{\Gamma(1+i\theta)}\frac{d}{dx}\int\limits_x^b (t-x)^{i\theta}f(t)dt, \tag{2.24}$$

Чтобы завершить определение дробного интегродифференцирования при всех $\alpha \in C$, остается при $\alpha = 0$ ввести единичный оператор:

$$D^0_{a+\phi} \overset{def}{=} I^0_{a+\phi} = \phi \tag{2.25}$$

1.3 Дробные интегралы некотрых элементарных функций.

В следующих ниже формулах полагаем $\alpha \in C$ и $I^{\alpha}_{a+}\phi = D^{-\alpha}_{a+}\phi$ при $Re\alpha < 0$.

Для степенных функций $\phi(x) = (x-a)^{\beta-1}$, $\phi(x) = (b-x)^{\beta-1}$, $Re\beta > 0$, имеет соответсвенно

$$I^{\alpha}_{a+}\phi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}, \alpha \in C, \tag{2.29}$$

$$I^{\alpha}_{b-}\phi = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}, \alpha \in C, \tag{2.30}$$

В общем случае $\phi(x) = (x-a)^{\beta-1}(b-x)^{\gamma-1}$ появляется гипергеометрическая функция Гаусса (1.72):

$$I^{\alpha}_{a+}\phi = (b-a)^{\gamma-1}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}{}_2F_1\left(1-\gamma, \quad \beta; \quad \alpha+\beta; \quad \frac{x-a}{b-a}\right),$$
$$a < x < b, \tag{2.31}$$

Пусть $\phi(x) = (x-a)^{\beta-1}\ln(x-a), Re\beta > 0$. Тогда

$$I^{\alpha}_{a+}[(x-a)^{\beta-1}\ln(x-a)] = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}[\psi(\beta)-\psi(\beta+\alpha)+\ln(x-a)], \tag{2.35}$$

Для функции $\phi(x) = \cos\sqrt{x-a}/\sqrt{x-a}$ имеем

$$I^{\alpha}_{a+}\phi = 2^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}(x-a)^{\frac{(2\alpha-1)}{4}}J_{\alpha-\frac{1}{2}}(\sqrt{x-a}), Re\alpha \geq 0, \tag{2.36}$$

Так же разложением в ряд получаются формулы

$$I^{\alpha}_{a+}[(x-a)^{\alpha-1}\cos A(x-a)] = \sqrt{\pi}\left(\frac{x-a}{A}\right)^{\alpha-1/2} \times$$

$$\times \cos\frac{A(x-a)}{2} J_{\alpha-1/2}\left(\frac{A(x-a)}{2}\right), Re\alpha > 0. \quad (2.38)$$

$$I^{\alpha}_{a+}[(x-a)^{\mu/2} J_{\mu}(\sqrt{x-a})] = 2^{\alpha}(x-a)^{(\mu+\alpha)/2} J_{\mu+\alpha}(\sqrt{x-a}), \quad (2.39)$$
$$a \in C, Re\mu > -1.$$

1.4 Дробное интегрирование и дифференцирование как взаимно обратные операции.

Хорошо известно, что обычное дифференцирование $\frac{d}{dx}$ и интегрирование $\int\limits_a^x ...dt$ являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т.е. $(\frac{d}{dx})\int\limits_a^x \phi(t)dt = \phi(x)$. Однако, вообще говоря, $\int\limits_a^x \phi'(t)dt \neq \phi(x)$ (так как добавляется постоянная - $\phi(a)$). Точно так же $(\frac{d}{dx})^n I^{\alpha}_{a+}\phi \equiv \phi$, но $I^{\alpha}_{a+}\phi^{(n)} \neq \phi$, отличаясь от ϕ многочленом порядка $n-1$. Подобным же образом для дробного дифференцирования всегда будет $D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\phi \equiv \phi$, но $I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\phi$ не всегда совпадает с $\phi(x)$ (так как вмешиваются функции $(x-a)^{\alpha-k}, k = 1, 2, ..., [Re\alpha]-1$, играющие роль многочленов для дробного дифференцирования, см.(2.20)).

Определение 2.3. *Через $I^{\alpha}_{a+}(L_p), Re\alpha > 0$, обозначим класс функций $f(x)$, представимых левосторонним дробным интегралом порядка α от суммируемой функции: $f = I^{\alpha}_{a+}\phi, \phi \in L_p(a,b), 1 \leq p < \infty$.*

Теорема 2.2. *Для того чтобы $f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_1), \quad Re\alpha > 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f_{n-a}(x) \overset{def}{=} I^{n-\alpha}_{a+} f \in AC^n([a,b]), \quad (2.40)$$

где $n = [Re\alpha] + 1$, и чтобы

$$f^{(k)}_{n-\alpha}(a) = 0, k = 0, 1, 2, ..., n-1 \quad (2.41)$$

Теорема 2.3. *Пусть $Re\alpha > 0$. Тогда равенство*

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\phi = \phi(x) \quad (2.42)$$

выполняется для любой суммируемой функции $\phi(x)$, а равенство

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}\phi = f(x) \quad (2.43)$$

-для функции

$$f(x) \in I^{\alpha}_{a+}(L_1). \quad (2.44)$$

Если вместо (2.44) предположить, что функция $f(x) \in L_1(a,b)$ имеет суммируемую производную $D^{\alpha}_{a+}f$ (в смысле определения 2.3), то (2.43), вообще *говоря, неверно и заменяется формулой*

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)}f^{(n-k-1)}_{n-\alpha}(a), \tag{2.45}$$

где $n = [Re\alpha] + 1$ *и* $f_{n-\alpha}(x) = I^{n-\alpha}_{a+}f$. *В частности, при* $0 < Re\alpha < 1$

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{2.46}$$

1.5 Формулы композиции. Связь с полугруппами операторов.

Теорема 2.4. *Равенство*

$$I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\phi = I^{\alpha+\beta}_{a+}\phi \tag{2.50}$$

выпоняется в каждом из следующих случаев:

1. $Re\beta > 0, Re(\alpha+\beta) > 0, \phi(x) \in L_1(a,b)$;
2. $Re\beta < 0, Re\alpha > 0, \phi(x) \in I^{-\beta}_{a+}(L_1)$;
3. $Re\alpha < 0, Re(\alpha+\beta) < 0, \phi(x) \in I^{-\alpha-\beta}_{a+}(L_1)$

(допустимы также случаи $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $\alpha + \beta = 0$ при вещественных α и β).

Определение 2.4. Однопараметрическое свойство линейных ограниченных операторов $T_\alpha, \alpha \geq 0$, *в банаховом пространстве* X *образует полугруппу, если*

$$T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \tag{2.54}$$

$$T_0\phi = \phi, \phi \in X. \tag{2.55}$$

Полугруппа операторов называется сильно непрерывной, если

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} || T_\alpha\phi - T_{\alpha_0}\phi ||_X = 0, 0 \leq \alpha_0 < \infty, \tag{2.56}$$

для каждого $\phi \in X$. *Полугруппа называется непрерывной в равномерной(опер. топологии), если предел(2.56) существет в операторной топологии, т.е.* $lim|| T_\alpha - T_{\alpha_0} || = 0$ *при* $\alpha \to \alpha_0$.

Легко видеть в силу (2.54), что если полугруппа сильно непрерывна при $\alpha = 0$, то она неизбежно сильно непрерывна при всех $\alpha \geq 0$.

Теорема 2.5. *Операторы дробного интегрирования образуют в* $L_p(a,b), p \geq 1$, *полугруппу, непрерывную в равномерной топологии для всех* $\alpha > 0$ *и сильно непрерывны для всех* $\alpha \geq 0$.

2 Асимптотические представления функции Миттаг-Леффлера

2.1 Интегральное представление для функции Миттаг-Леффлера

Фукция типа Миттаг-Леффлера

$$E_p(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + kp^{-1})}(p > 0) \tag{3.1}$$

Следующая группа формул непосредственно вытекает из самого определения (3.1) функции $E_p(z;\mu)$:

$$E_1(z;1) = e^z, \quad E_1(z;2) = \frac{e^z - 1}{z}, \tag{3.2}$$

$$E_{1/2}(z;1) = \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad E_{1/2}(z;2) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \tag{3.3}$$

$$E_p(z;\mu) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} + zE_p\left(z;\mu + \frac{1}{p}\right), \tag{3.4}$$

$$E_p(z;\mu) = \mu E_p(z;\mu+1) + \frac{z}{p}E'_p(z;\mu+1), \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m [z^{\mu-1}E_p(z^{1/p};\mu)] = z^{\mu-m-1}E_p(z^{1/p};\mu - m) \ \ (m \geq 1) \tag{3.6}$$

2.2 Асимптотические свойства функции Миттаг-Леффлера

Обозначим через $\gamma(\epsilon, \alpha)(\epsilon > 0, 0 < \alpha < \Pi)$ контур, пробегаемый в направлении неубывания $arg\zeta$ и состоящий из следующих частей:

1. луч $arg\zeta = -\alpha, \mid \zeta \mid= \epsilon$;
2. дуга $-\alpha \leq arg\zeta \leq \alpha$ окружности $\mid \zeta \mid= \epsilon$;
3. луч $arg\zeta = \alpha, \mid \zeta \mid= \epsilon$;

Лемма 3.2.1.*Пусть $p > \frac{1}{2}$ и μ - любое комплексное число.*
Тогда при произвольном $p > 0$ и β, удовлетворяющем условию

$$\frac{\pi}{2p} < \beta \leq \min\left\{\pi, \frac{\pi}{p}\right\}; \tag{3.24}$$

имеют место следующее интегральные представления: если $z \in G^{(-)}(\epsilon;\beta)$, то

$$E_p(z;\mu) = \frac{p}{2\pi} \int\limits_{\gamma(\epsilon;\beta)} \frac{\epsilon^{\zeta^p}\zeta^{p()1-\mu}}{\zeta - z} d\zeta \tag{3.25}$$

если $z \in G^{(+)}(\epsilon, \beta)$, то

$$E_p(z,\mu) = pz^{p(1-\mu)}e^{z^p} + \frac{p}{2\Pi l}\int\limits_{\gamma(\epsilon,\beta)} \frac{\epsilon^{\zeta^p}\zeta^{p(1-\mu)}}{\zeta - z}d\zeta. \tag{3.26}$$

2. *Пусть $p = \frac{1}{2}$ и $Re\mu > 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ имеют место следующие представления: если $z \in G^{(-)}(\epsilon, \Pi)$, то*

$$E_{1/2}(z,\mu) = \frac{1}{4\Pi l}\int\limits_{\lambda(\epsilon,\Pi)} \frac{\epsilon^{\zeta^{1/2}}\zeta^{1/2(1-\mu)}}{\zeta - z}d\zeta \tag{3.27}$$

если $z \in G^{(+)}(\epsilon, \pi)$, то

$$E_{1/2}(z;\mu) = \frac{1}{2}z^{1/2(1-\mu)}\epsilon^{z^{1/2}} + \frac{1}{4\Pi l}\int\limits_{\lambda(\epsilon,\pi)} \frac{\epsilon^{\zeta^{1/2}}\zeta^{1/2(1-\mu)}}{\zeta - z}d\zeta \tag{3.28}$$

Лемма 3.3. Пусть параметр μ удовлетворяет условию

$$0 < Re\mu < 3. \tag{3.33}$$

Тогда для функции $E_{1/2}(z,\mu)$ имеют место следующие представления:

1. Если $| \, argz \, | < \pi$, то

$$E_{1/2}(z;\mu) = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\epsilon^{z^{1/2}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t}\frac{\pi}{2}(1-\mu))}{t+z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt. \tag{3.34}$$

2. Если $0 \leq argz < \pi$ или $-\pi < argz \leq 0$, то соответсвенно

$$E_{1/2}(z;\mu) = \frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\Big\{\epsilon^{z^{1/2}} + \epsilon^{\mp i\pi(1-\mu)}\epsilon^{-z^{1/2}}\Big\} +$$

$$+\frac{\sin\pi\mu}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\epsilon^{\pm i\left[\sqrt{t} - \frac{\pi}{2}(1-\mu)\right]}}{t+z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt \tag{3.35}$$

3. Если $0 \leq argz \leq \pi$ или $-\pi \leq argz \leq 0$, то соответсвенно

$$E_{1/2}(z;\mu) = \frac{1}{2}z^{1/2(1-\mu)}\Big\{\epsilon^{z^{1/2}} + \epsilon^{\mp i\pi(1-\mu)}\epsilon^{-z^{1/2}}\Big\} +$$

$$+\epsilon^{\pm i\frac{\pi}{4}(1+\mu)}\frac{\sin\pi\mu}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\epsilon^{-\frac{1\mp i}{\sqrt{2}}\sqrt{v}}v^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{\pm iv + z}dv. \tag{3.36}$$

Лемма 3.4. Пусть $p > \frac{1}{2}, \mu$ - произвольное комплексное число и α - любое вещественное число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\pi}{2p} < \alpha < \min\left\{\pi, \frac{\pi}{p}\right\}, \tag{3.45}$$

Тогда для любого целого $p \geq 1$ пи $\mid z \mid \to \infty$ спрапведливы асимтотические формулы:

1. При $\mid arg z \mid \leq \alpha$

$$E_\rho(z;\mu) = pz^{p(1-\mu)}\epsilon^{z^p} - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - kp^{-1})} + O(\mid z \mid^{-1-p}). \tag{3.46}$$

2. При $\alpha \leq \mid arg z \mid \leq \pi$

$$E_\rho(z;\mu) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - kp^{-1})} + O(\mid z \mid^{-1-p}). \tag{3.47}$$

Следствие. Пусть $p > \frac{1}{2}$, $\mu-$ вещественная постоянная и $\alpha-$ фиксированное число из интервала $\left(\frac{\pi}{2p}, \min\left\{\pi, \frac{\pi}{p}\right\}\right)$. Тогда справедливы следующие оценки:

1. Если $\mid arg z \mid \leq \alpha$ и $\mid z \mid \geq 0$, то

$$\mid E_p(z,\mu) \leq M_1(1+\mid z \mid)^{p(1-\mu)}\epsilon^{Re z^p} + \frac{M_2}{1+\mid z \mid}. \tag{3.54}$$

2. Если $\alpha \leq \mid arg z \mid \leq \pi$ и $\mid z \mid \geq 0$, то

$$\mid E_p(z,\mu) \mid \leq \frac{M_2}{1+\mid z \mid}, \tag{3.55}$$

где M_1 и M_2 - постоянные, не зависящие от z.

Лемма 3.5. Если $0 < Re\mu < 3$, то для любого целого $p \geq 1$ при $\mid z \mid \in \infty$ справедливы асимптотические формулы:

1. При $0 \leq arg z \leq \pi$ или $-\pi \leq arg z \leq 0$ соответсвенно имеем

$$E_{1/2}(z,\mu) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{\epsilon^{z^{1/2}}\epsilon^{\mp i\pi(1-\mu)}\epsilon^{-z^{1/2}}\right\} - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - 2k)} + O(\mid z \mid^{-1-p}). \tag{3.56}$$

2. При $0 < x < +\infty$ имеем

$$E_{1/2}(-x,\mu) = x^{1/2(1-\mu)} \cos\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}(1-\mu)\right) - \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{x^{-k}}{\Gamma(\mu - 2k)} + O(x^{-1-p}) \tag{3.57}$$

Лемма 3.6. Если $0 < p \leq \frac{1}{2}$, *то для любого целого* $p \geq 1$ *при* $\mid z \mid \in \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$E_p(z,\mu) = p \sum_{|argz+2\pi n| \leq \frac{\pi}{2p}}^{p} (z^p \epsilon^{z^p \epsilon^{i2\pi pn}})^{1-\mu} \epsilon^{\epsilon^{i2\pi pn} z^p} -$$

$$- \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - kp^{-1})} + O(\mid z \mid^{-1-p}). \qquad (3.59)$$

где в первой сумме суммирование распространяется на те начения $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ *для которых* $\mid argz 2\pi n \mid \leq \frac{\pi}{2p}$.

Лемма 3.7. Пусть $0 < \mu < 3$. *Тогда:*

1. Все нули λ_k с достаточно большим модулем простые и лежат на полуоси $(-\infty, 0]$.

2. Справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_k = -(\pi k)^2 \left(1 + O(\frac{1}{k})\right).$$

Лемма 3.8.

1. *Все достаточно большие по модулю нули функции* $E_p(z;\mu)$ $\big($*где* $p > \frac{1}{2}, p \neq 1, Im\mu = 0\big)$ *простые.*

2. *Справедливы асимптотические формулы*

$$\gamma_k^{(\pm)} = \epsilon^{\pm l \frac{\pi}{2p}} (2\pi k)^{1/p} \left\{1 + O\left(\frac{\log k}{k}\right)\right\}, \quad k \in \infty \qquad (3.68)$$

3 Нули функции типа Миттаг-Леффлера

3.1 Исследование нулей функции Миттаг-Леффлера

Во второй главе была рассмотрена формула

$$\int_0^{+\infty} \epsilon^{-t}(zt^{1/p};\mu)t^{\mu-1}dt = \frac{1}{1-z} \quad (p > 0, \quad \mu > 0) \qquad (4.1)$$

в предположении, что $|z| < 1$. В следующей лемме, будет следовать справедливость форумулы (4.1) во всей области $D_p^*(0;1)$ содержащей круг $|z| < 1$.

Лемма 3.9. Пусть $p > 0$, $v > 0$ *и* $\theta(-\pi < \theta \leq \pi)$ *- фиксиованные параметры. Тогда:*

1. При $z \in D_p^*(\theta; v)$ и $\zeta \in \overline{D_p(\theta; v)}$ справедлива формула

$$\int\limits_{)}^{+\infty} \epsilon^{-(\epsilon^{-i\theta}\zeta)^p t} E_p(\epsilon^{-i\theta} z t^{1/p}; \mu) t^{\mu-1} dt = \epsilon^{i\mu p\theta} \frac{\zeta^{1-\mu p}}{\zeta - z} \quad (\mu > 0). \tag{4.2}$$

2. Интеграл (4.2) сходится абсолютно и равномерно относительно обеих переменных z и θ, если

$$z \in \overline{G_p^*(\theta; v)} \text{ и } \zeta \in \overline{D_p(\theta; v)} \tag{4.3}$$

где $G_p^*(\theta; v)$ - любая ограниченная подобласть области $D_p^*(\theta; v)$.

Следствие. В каждой ограниченной и замкнутой части области $\triangle$, не содержащей точек луча $[1, +\infty)$, справедлива формула

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{p \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \epsilon^{-t} E_p(z t^{1/p}; \mu) t^{\mu-1} dt \quad (\mu > 0). \tag{4.13}$$

причем стремление к пределу равномерное относительно z.

Лемма 3.10. В каждой замкнутой ограниченной области $\triangle$, не содержащей точек луча $[1, +\infty)$, справедлива формула

$$\frac{1}{1-z} = \Gamma(\mu) \quad \lim_{p \to +\infty} E_p(z; \mu) \quad (\mu > 0) \tag{4.14}$$

причем стремление к пределу равномерное относительно $z \in \triangle$.

Теорема 3.3. *Пусть f(z) - главная ветвь аналитической функции f(z), регулярной в окрестности точки z = 0 и представимой там степенным рядом (4.19). Тогда в любой ограниченной и змкнутой области $\overline{D}$, содержащейся внутри звезды Миттаг-Леффлера M_f функции $f(z)$, выполняются предельные соотношения*

$$f(z) = \lim_{p \to +\infty} \int\limits_0^{+\infty} \epsilon^{-t} f_{p,\mu}(t^{1/p} z) t^{\mu-1} dt, \tag{4.22}$$

$$f(z) = \Gamma(\mu) \lim_{p \to +\infty} f_{p,\mu}(z). \tag{4.23}$$

притом равномерно относительно всех $z \in \overline{D}$.

Заключение

В данной работе получены асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлёра. Функции типа Миттаг-Леффлёра играют важную роль при построении решений дифференциальных уравнений нецелого порядка. В свою очередь, нули функции типа Миттаг-Леффлёра имеют определяющую роль в спектральных задачах, порождённых операторами дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля, и, в частности, могут быть истолкованы, как собственные значения соответствующих краевых задач. Задачи подобного рода возникают в различных областях естествознания. например, в теории вязкоупругости, причём, речь может идти как об обыкновенных дифференциальных уравнениях нецелого порядка, так и о краевых задачах для уравнений в частных производных. В последнем случае полученные в данной работе результаты могут быть использованы для обоснования применимости метода Фурье разделения переменных для уравнений математической физики, содержащих операторы интегродифференцирования дробного порядка Римана-Лиувилля.