Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Обратная задача рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью

(название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом)

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления
механико – математического факультета
наименование факультета
Кирьяновой Татьяны Александровны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент М. Ю. Игнатьев

должность, уч. степень, уч.звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В. А. Юрко

должность, уч. степень, уч.звание | дата, подпись | инициалы, фамилия

Саратов 2017

Введение

Дифференциальные уравнения с коэффициентами с неинтегрируемой особенностью на конце или внутри интервала часто изучаются в естественных и технических науках.

В данной рассматривается система дифференциальных уравнений

$$y' - x^{-1}Ay - q(x)y = \rho By,\ x > 0, \tag{1}$$

где A, B - постоянные матрицы размерностью $n \times n$, $q(x), x \in (0, \infty)$, выполняется построение различных фундаментальных систем решений для (1), которые называются решениями Вейля. Решения Вейля играют важную роль при изучении прямых и обратных спектральных задач.

На протяжении всей работы предполагается следующее:

Предположение 1 *$B = diag(b_1, \cdots, b_n), n > 2$ A и $q(x)$ - недиагональные, $q(\cdot) \in W_1^1[0, \infty)$. Собственные значения $\{\mu_j\}_{j=1}^n$ матрицы A различны и такие, что $\mu_j - \mu_k \notin \mathbb{Z}$ для $j \neq k$, кроме того $Re\,\mu_1 < \cdots < Re\,\mu_m$. Элементы $b_1, \cdots, b_n$ матрицы B - комплексные числа отличные от нуля такие, что $\sum\limits_{j=1}^{b} b_j = 0$.*

Полученные результаты могут использоваться в различных областях спектральной теории.

Работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списков используемых источников.

В введении содержатся общие сведения о работе: актуальность, цель, описывается основная задача, даны вспомогательные термины и основные определения.

В первом разделе вводятся необходимые сведения для дальнейшей работы, приводится построение тензоров, а также построение оператора Грина для негомогенного уравнения

$$Y' = Q_0^{(0)}(x, \rho)Y + F,\ Q_0(x, \rho) = x^{-1}A + \rho.$$

Также приводятся оценки и асимптотическое поведение решений уравнений Вольтерры вида:

$$Y(x) = T_k^0(x,\rho) + \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x,l,\rho)(q^{n-k+1})(t)Y(t))dt,$$

$$Y(x) = F_k^0(x\,\rho) - \int\limits_x^\infty G_k(x,t,\rho)(q^{(k)}(t)Y(t))dt,$$

Во втором разделе показывается следующее: фундаментальные тензоры, построенные в первом разделе, могут быть представлены в виде векторного произведения решений Вейля. Для решений Вейдя доказываются асимтотики.

В третьем разделе показывается единственность решения обратной задачи рассеяния для системы (1)

Основное содержание работы

В первом разделе рассматриваются следующие вспомогательные уравнения:

$$Y' = Q^{(m)}(x,\rho)Y, \tag{2}$$

где Y - это функция со значениями во внешнем произведении $\wedge^m\mathbb{C}^n$. Здесь и далее

$$Q(x,\rho) := x^{-1}A + \rho B + q(x)$$

и для матрицы M размерности $n \times n$ оператор $M^{(m)}$, действующий в $\bigwedge^m \mathbb{C}^m$, определен таким образом, что для векторов $u_1, \dots, u_m$ выполняются следующие тождества

$$M^{(m)}(u_1 \wedge u_2 \wedge u_m) = \sum_{j=1}^m u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

В дальнейшем также будем использовать эти обозначения.

Обозначим через через $\mathcal{A}_m$ множество всех мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < a_m, a_j \in \{1,2,\dots,n\}$. Для набора векторов $u_1, \dots, u_n$ из $\mathbb{C}$ и мультииндекса $\alpha \in \mathcal{A}_m$ определим

$$u_\alpha := u_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge u_{\alpha_m}.$$

Пусть $a_1, \dots, a_n$ -числовая последовательность. Для $\alpha \in \mathcal{A}_m$ определим

$$a_\alpha := \sum_{j \in \alpha} a_j.$$

Для $k \in \overline{1, n}$ обозначим

$$\overrightarrow{a}_k := \sum_{j=1}^{k} a_j, \overleftarrow{a} = \sum_{j=k}^{n} a_j.$$

Для мультииндекса α символ α' означает упорядоченное дополнение мультииндекса α до $(1, 2, \dots, n)$. Отметим, что предположение 1, в частности, подразумевает, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k = \sum_{k=1}^{n} R_k = 0$, и поэтому для мультииндекса α выполняется $R_{\alpha'} = -R_\alpha$ и $\mu_{\alpha'} = -\mu_\alpha$.

Далее предполагаем, что $\rho \in \overline{S}_\nu$ для некоторого произвольного фиксированного ν. Рассматриваем уравнение Вольтерры следующего вида:

$$Y(x) = T_k^0(x, \rho) + \int\limits_0^x G_{n-k+1}(x, l, \rho)(q^{n-k+1})(t)Y(t))dt. \tag{3}$$

$$Y(x) = F_k^0(x\,\rho) - \int\limits_x^\infty G_k(x, t, \rho)(q^{(k)}(t)Y(t))dt, \tag{4}$$

где

$$T_k^0(x, \rho) := C_k(x, \rho) \wedge \dots \wedge C_n(x, \rho),$$

$$F_k^0(x, \rho) := E_1(x, \rho) \wedge \dots E_k(x, \rho) = \Psi_1^0(x, \rho) \wedge \dots \wedge \Psi_k^0(x, \rho)$$

и $G_m(x, t, \rho)$ - оператор, действующий в $\bigwedge^m \mathbb{C}^n$:

$$G_m(x, t, \rho)f = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} (-1)^{\sigma_\alpha} |f \wedge \Psi_{\alpha'}^0(t, \rho)| \Psi_\alpha^0(x, \rho) =$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}} (-1)^{\sigma_\alpha} |f \wedge E_{\alpha'}(t, \rho)| E_\alpha(x, \rho)$$

Здесь $\sigma_\alpha \in \{0, 1\}$ такое, что $(-1)^{\sigma_\alpha} = |f_\alpha \wedge f_{\alpha'}|$.

Через C обозначим различные константы, которые не зависят от x и ρ.

Теорема 1 *Для любого* $\rho \in \overline{S}_\nu \setminus \{0\}$ *уравнения (3) и (4) имеют единственные решения* $T_k(x,\rho)$ *и* $F_k(x,\rho)$ *соответственно такие, что*

$$\|T_k(x,\rho)\| \le C \begin{cases} |(px)^{\overleftarrow{\mu_\alpha}}, & |\rho x| \le 1 \\ |\exp(\rho x \overleftarrow{R}_\alpha)|, & |\rho x| > 1 \end{cases}$$

$$\|F_k(x,\rho)\| \le C \begin{cases} |(px)^{\overrightarrow{\mu_\alpha}}|, & |\rho x| \le 1 \\ |\exp(\rho x \overrightarrow{R}_\alpha)|, & |\rho x| > 1 \end{cases}$$

Имеют место следующие асимптотики

$$F_k(x,\rho) = \exp(\rho x \overrightarrow{R}_\alpha)(\mathfrak{f}_1, \wedge \ldots \wedge f_k + o(1)), x \to \infty,$$

$$T_k(x,\rho) = (px)^{\overleftarrow{\mu_\alpha}}(\eta_k \wedge \ldots \wedge \eta_n + o(1)), x \to \infty.$$

Далее мы рассмотрим асимптотическое поведение фундаментальных тензоров $T_k(x,\rho), F_k(x,\rho)$ для $\rho \to \infty$ и $\rho \to 0$.

Лемма 1 *Пусть* $T \in (0, \infty$ *произвольное и фиксированное. Тогда для функции*

$$H_0(x,\rho) : \int\limits_0^{|\rho|^{-1}} G_{n-l+1}(x,t,\rho)(q^{n-k+1}(t)T_k(x,\rho))dt$$

верная следующая оценка

$$\|H_0(x,\rho)\| \le C|\rho|^{-1} \exp(\rho x \overleftarrow{R}_k)|$$

для $|\rho| > T^{-1}$ *равномерна по* $x \in [|\rho|^{-1}, T]$*, где константа* C *зависит только* T*.*

Лемма 2 *Пусть* $T \in (0, \infty)$ *произвольное и фиксированное. Тогда:*

1. *для любым двух мультииндексов* $\alpha, \beta \in \alpha \in \mathcal{A}_{n-k+1}$ *функция*

$$H^0_{\alpha\beta}(x,\rho) = \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} \left|\left(q^{(n-k+1)}(t)\right) E_{\beta'}(t,\rho)\right| E_\beta(x,\rho)dt$$

допускает оценку

$$\|H^0_{\alpha\beta}(x,\rho)\| \le C \left\|\rho^{-\varepsilon} \exp(\rho x \overrightarrow{R}_k)\right|$$

для $|\rho| > T^{-1}$ *однородного по* $x \in [|\rho^{-1}, T]$, *где* $\varepsilon \in (0,1)$ *- произвольное, а константа* C *зависит только от* ε *и* T.

2. *для любого мультииндекса* $\beta \in \mathcal{A}_k$ *функция*

$$H_\beta^\infty(x,\rho) = \int\limits_{|\rho|^{-1}}^{x} \left|(q^{(k)}(t)F_k^0(t,\rho) \wedge E_{\beta'}(t,\rho)\right) |E_\beta(x,\rho)dt$$

допускает оценку

$$\|H_\beta^\infty(x,\rho)\| \le C \left\|\rho^{-1}\exp(\rho x \overrightarrow{R}_k)\right|$$

для любых $|\rho| > T^{-1}$ *равномерных по* $x \in [T, \infty)$, *константа* C *зависит только от* T.

Лемма 3 *Пусть* $T \in (0,\infty)$ *произвольное и фиксированное. Тогда верны следующие оценки:*

1. $\|T_k(x,\rho) - T_k^0(x,\rho)\| \le C \left|\rho^{-\varepsilon}\exp(\rho x \overleftarrow{R}_k)\right|$
для $|\rho| > T^{-1}$ *равномерных по* $x \in [|\rho|^{-1}, T]$, *где* $\varepsilon \in (0,1)$ *- произвольная константа* C *зависит только от* ε *и* T;

2. $|F_k(x,\rho) - F_k^0(x,\rho)\| < C \left|\rho^{-1}\exp(\rho x \overrightarrow{R}_k)\right|$
для $|\rho| > T^{-1}$ *равномерных по* $x \in [|\rho|^{-1}, T]$ *и константа* C *зависит только* T.

Следствие 1 *Для любого фиксированного* $x \in (x,\rho)$ *и* $\rho \to \infty, \rho \in \overline{S}_\nu$ *верно асимптотическое представление:*

$$T_k(x,\rho) = T_k^0(x,\rho) + O\left(\rho^{-\varepsilon}\left(\rho x \overleftarrow{R}_k\right)\right), \varepsilon \in (0,1),$$

$$F_k(x,\rho) = F_k^0(x,\rho) + O\left(\rho^{-1}\exp\left(\rho x \overrightarrow{R}_k\right)\right).$$

Лемма 4 *Для любого* $k = \overline{1,n}\widetilde{F}_k(x,\cdot), \widetilde{T}_k(x,\cdot)$ *допускает непрерывное решение по* $\overline{S}_\mu$.

Во втором разделе дается определение решения Вейля:

Определение 1 *Пусть $k \in \overline{1,N}$ и $\rho \in S_\nu$ - фиксировано. Функция $y(x), x \in (0,\infty)$ называется к-ым решением Вейля, если оно удовлетворяет системе (1) и верна следующая асимптотика:*

$$y(x) = O(x^{\mu_k}), x \to 0, y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty.$$

В этом разделе показывается, что фундаментальные тензоры $F_k(x,\rho)$, построенные в предыдущем разделе, фактически могут быть представлены в виде векторного произведения решений Вейля.

Лемма 5 *Для любых $\rho \in \overline{S}_\nu \setminus \{0\}$ существуют единственные системы абсолютно непрерывных относительно $x \in (0,\infty)$ функций $\{\upsilon(x,\rho),\ldots,\upsilon_n\}$, $\{\omega_1(x,\rho),\ldots,\omega_n(x,\rho)\}$ такие, что:*

- $\{\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n\}$ *- ортогональна и* $\{\omega_1(x,\rho),\ldots,\omega_n(x,\rho)\}$ *- ортогональна;*
- $T_k = \omega_k \wedge \ldots \wedge \omega_n, F_k = \upsilon_1 \wedge \ldots \wedge \upsilon_n;$
- *верна следующая асимптотика*

  $$\upsilon_k = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty, \omega_k = (\rho x)^{\mu_k}(\mathfrak{g}_k + o(1)), x \to \infty,$$

  где $\mathfrak{g}_n = \mu_n, \mathfrak{g}_k - \mu_k \in splan\{\mathfrak{g}_k\}_{j>k}$ *и вектора* $\{\mathfrak{g}_k\}_{k=1}^n$ *ортогональны;*
- *верны следующие отношения имеют вид:*

  $$(\omega_k' - Q(x,\rho)\omega_k) \wedge T_{k+1} = 0, F_{k-1} \wedge (\upsilon_k' - Q(x,\rho))\upsilon_k) = 0;$$

- $\upsilon \wedge F_k = 0, \omega_k \wedge T_s = 0,$ *если* $s \le k$.

Перейдем от $\{\upsilon_k\}$ к решению Вейля.

Определим $\Delta_k(\rho) = |F_{k-1}(x,\rho) \wedge T_k(x,\rho)|$. Ясно, что$\Delta_k(\rho)$ и не зависит от хx.

Теорема 2 *Для любых $\rho \in \overline{S}_\mu \setminus \{0\}$, для которых верно $\Delta_k(\rho) \neq 0$, существует единственная функция $\psi_k(x,\rho)$ такая, что*

- $F_{k-1} \wedge \psi_k = F_k, \psi_k \wedge T_k = 0;$
- $\psi_k' = Q(x,\rho)\psi_k$*(т.е.* ψ_k *-решение системы (1)*

- *если $\rho \in S_\mu$, то верно асимптотическое представление:*

$$\psi_k(x,\rho) = \exp(\rho R_k x) - \mathfrak{f}_k + 0(1)), x \to \infty, \psi_k(x,\rho) = O((\rho x)^{\mu_k}), x \to 0$$

Лемма 6 *Пусть $\rho \in S_\nu$ такое, что $\Delta_k(\rho) \neq 0$. Тогда любое решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$y(x) = O((\rho x)^{\nu_k}),\ x \to 0,\ y(x) = \exp(\rho R_k x)(\mathfrak{f}_k + o(1)), x \to \infty,$$

совпадает с $\psi_k(x,\rho)$.

Теорема 3 *Для $\rho \to \infty, \rho \in \overline{S}_\nu$ функции $\Delta_k(\rho)$ допускает следующие асимптотики:*

$$\Delta_k(\rho) = \Delta_k^0 + O(\rho^{-\varepsilon}, \varepsilon \in (0,1)$$

Для любого фиксированного x и $\rho \to \infty, \rho \in \overline{S}_\nu$ имеет место следующие асимптотики:

$$\psi_k(x,\rho) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{jk}^0 \exp(\rho x R_j)\mathfrak{f}_j + O\left(\rho^{-\varepsilon}\exp(\rho x R_k)\right),$$

где γ_{jk}^0 - константы, $\gamma_{kk}^0 = 1$ не зависят от $q(\cdot)/$.

Теорема 4 *Если для всех $k = \overline{1,n}\Delta_k(0) \neq 0$, то все функции $\rho^{\mu_k}\psi_k(x,\rho)$ будут непрерывными по ρ в расширении $\overline{S}_\nu \cap \{|\rho| \leq \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$*

В третьем разделе рассматривается обратная задача рассеяния для системы (1). Предположим, что выполняется следующее условие:
Условие G_0. Для любого сектора $S_\nu, \mu = \overline{1,N}$ все функции $\Delta_k(\rho), k = \overline{1,n}$ не обращаются в ноль для $\rho \in \overline{S}_\nu$.

Для каждого сектора $S_\nu, \mu = \overline{1,N}$ рассматриваем фундаментальную матрицу

$$|Psi(x,\rho) := (\psi_1(x,\rho), \ldots, \psi_n(x,\rho)),$$

где $\psi_k(x,\rho)$ - решение Вейля системы (1), построенное в предыдущем разделе. Пусть Σ_ν - луч, который разделяет сектора S_ν и S_{n+1} (будем считать, что сектора $S_1, S_2, \ldots$ пронумерованы против часовой стрелки и $S_{N+1} :=$

S_1). При условии G_0 для любого $\rho \in \Sigma_\nu$ существуют граничные условия $\Psi\_(x,\rho) := \lim\limits_{\xi\to\rho,\xi\in S_\nu} \Psi(x,\xi)$ и $\Psi_+(x,\rho) := \lim\limits_{\xi\to\rho,\xi\in S_{\nu+1}} \Psi(x,\xi)$. Определим для $\rho \in \Sigma_\nu$ матрицу $\vartheta(\rho) := \Psi\_^{-1}(x,\rho)\Psi_+(x,\rho)$. В качестве данных рассеяния возьмем $\nu(\cdot)$. Далее рассмотрим следующую обратную задачу рассеяния.

ОЗР0. Даны $\vartheta(\rho), \rho \in \Sigma \setminus \{0\}, A, B$ восстанавливают $q(x), x \in (0,\infty)/$

В дальнейшем вместе с системой (1) и матрицей коэффициента $q(\cdot)$ рассматриваем систему такого же вида, но с разными (в целом) коэффициента $\widetilde{q}(\cdot)$. Будем полагать: если символ ξ обозначает какой-то элемент, относящийся к системе (1) с коэффициентом $q(\cdot)$, то $\widetilde{\xi}$ аналогично к системе (1) с коэффициентом $\widetilde{q}(\cdot)$.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема, которая утверждает, что условия R_0 и G_0 и определение матрицы $\vartheta(\rho), \rho \in \Sigma \setminus \{0\}$ однозначно задают коэффициент $q(\mathrm{x}), x \in (0,\infty)$.

Теорема 5 *Пусть матрицы A, B такие, что выполняется условие R_0. Пусть $q(\cdot)$ и $\widetilde{q}(\cdot)$ такие, что выполняться условие G_0. Тогда если $\widetilde{\vartheta}(\rho) = \vartheta(\rho)$ для любых $\rho \in \Sigma \setminus \{0\}$ то, верно $\widetilde{q}(x) = q(x)$ почти для всех $x \in (0,\infty)$.*

Заключение

В данной бакалаврской работе была показана единственность решения обратной задачи рассеяния для системы (1). Кроме этого, было показано, что фундаментальные тензоры, построенные в первом разделе, могут быть представлены в виде векторного произведения решений Вейля. Кроме того, был построен оператор Грина. Для тензоров были доказаны асимптотики при $x \to 0$ и при $x \to \infty$.