Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
вычислительной математики

Спектральные данные оператора Штурма-Лиувилля

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

на графе-звезде

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы
направления (специальности) 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления (специальности)
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Кузнецовой Марии Андреевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент, кандидат ф.-м.наук ____________________ Бутерин С.А.
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
профессор, доктор ф.-м.наук ____________________ Юрко В.А.
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2017 год

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время дифференциальные операторы на графах активно изучаются отечественными и зарубежными математиками. Актуальность этой темы обусловлена тем, что она имеет приложение в различных областях естествознания: механике, электронике, нанотехнологиях. Первоначально понятие квантового графа (это другой термин для обозначения дифференциального оператора на графах) рассматривалось в химии, однако область применимости данной модели оказалась гораздо шире. Согласно В. Пивоварчику, анализ оператора Штурма-Лиувилля даже на простейшем графе-звезде важен для разработки и управления устройствами, работающими на квантовом уровне.

В данной работе рассмотрен самосопряженный дифференциальный оператор Штурма-Лиувилля на графе-звезде. Под графом-звездой понимается граф, у которого все ребра имеют одну общую вершину, а все остальные вершины, отличные от этой, смежны ровно с одним ребром. Данный оператор называется оператором Штурма-Лиувилля, так как дифференциальные выражения, применяемые к каждой компоненте функции на графе из области определения оператора, совпадают с дифференциальными выражениями обыкновенных операторов Штурма-Лиувилля на отрезке. Вводя понятие дифференциального оператора на графах, необходимо также учитывать ограничения, накладываемые на функции на графах, составляющие область определения оператора — условия склейки. Так же, как и для дифференциального оператора на конечном интервале, для оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде вводится понятие собственных значений.

Основной целью работы является получение асимптотических формул для собственных значений и весовых чисел оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде. Полученные формулы могут быть использованы при исследовании обратных задач спектрального анализа. В отличие от прямых задач, обратные спектральные задачи состоят в восстановлении дифференциальных операторов по их спектральным характеристикам.

Данная работа состоит из трёх разделов: “Основные понятия и вспомогательные утверждения”, “Асимптотические формулы для собственных значений”, “Асимптотические формулы для весовых чисел”.

В разделе “Основные понятия и вспомогательные утверждения” мы введем основные определения: функция на графе, оператор на графе, собственные значения, весовые числа. Мы рассмотрим такие важные понятия как условия склейки и матрица Вейля. Будет сформулировано несколько лемм, необходимых для получения асимптотических формул. При доказательстве лемм будут использованы стандартные неравенства для модуля суммы, Гельдера и некоторые другие, которые мы сформулируем. В целом раздел носит вспомогательный характер.

В разделе “Асимптотические формулы для собственных значений” будет введена характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями рассматриваемого оператора Штурма-Лиувилля на графе. Важным фактом является то, что в самосопряженном случае каждое собственное значение является нулем характеристической функции алгебраической кратности, совпадающей с геометрической. Мы будем доказывать асимптотические формулы для нулей характеристической функции, являющейся целой. В процессе доказательства неоднократно будут использованы разложения Тейлора и теорема Руше.

Раздел “Асимптотические формулы для весовых чисел” посвящен изучению вычетов матрицы Вейля в точках, являющихся собственными значениями. Матрица Вейля является мероморфной функцией, полюса которой могут быть только нулями характеристической функции. Мы докажем, что для самосопряженного оператора полюса матрицы Вейля будут простыми. Также будут получены асимптотическое формулы для весовых чисел, при их получении нами будут применены теоремы Коши о вычетах, разложения Тейлора, неравенства для модуля интеграла. Кроме того, применены знания из теории рядов Фурье, алгебры и комплексного анализа. Отметим, что асимптотические формулы для весовых чисел являются новым результатом.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе вводятся понятие оператора Штурма-Лиувилля на графе-звезде, а также сопутствующие определения.

Если Γ является конечным графом с $m > 1$ ребрами, $m+1$ вершинами, одна из которых — вершина степени m, а остальные вершины степени 1, то такой граф Γ назовем графом-звездой. Каждому ребру e_j графа Γ, $j = \overline{1,m}$ может быть приписано число $l_j > 0$, оно называется длиной ребра. На ребре e_j вводится вещественный параметр x_j, $x_j \in [0, l_j]$. Для простоты положим $l_j = \pi$, $j = \overline{1,m}$. Пусть $x_j = \pi$ соответствует вершине степени m, $x_j = 0$ соответствует смежной ребру вершине степени 1, $j = \overline{1,m}$.

Определение 1. *Функцией на графе* Γ *называется вектор* $y = [y_j]_{j=1}^m$, *где* y_j *— функция от* x_j, $x_j \in [0, l_j]$.

Будем рассматривать множество D функций y на графе-звезде Γ, для которых каждая компонента $y_j \in W_2^2[0,\pi]$, и выполнены следующие условия:

$$y_j(0) = 0,\ j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j'(\pi) = 0, \tag{2}$$

$$y_1(\pi) = y_2(\pi) = \ldots = y_m(\pi). \tag{3}$$

Выполнение условий (2)–(3) для функции на графе y можно записать как $V(y) = 0$, где

$$V(y) := \begin{pmatrix} y_1(\pi) - y_2(\pi) \\ \vdots \\ y_{m-2}(\pi) - y_{m-1}(\pi) \\ y_{m-1}(\pi) - y_m(\pi) \\ \sum_{j=1}^{m} y_j'(\pi) \end{pmatrix}.$$

Определение 2. *Дифференциальным оператором Штурма-Лиувилля L на графе-звезде Γ, действующим на множестве D, называют отображение $Ly = [L_j y_j(x_j)]_{j=1}^m$, $y \in D$, где*

$$L_j y_j(x_j) = -y_j''(x_j) + q_j(x_j) y_j(x_j),\ q_j(x_j) \in L_2(0,\pi),\ q_j(x_j) \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Оператор L с вещественными потенциалами является самосопряженным в пространстве функций из множества D со следующим скалярным произведением:

$$(y, z) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^\pi y_j(x_j) \overline{z_j(x_j)} dx_j.$$

Из данного свойства следует вещественность собственных значений.

Определение 3. *Число λ называется собственным значением оператора L, если существует нетривиальное решение $y \in D$ уравнения*

$$Ly = \lambda y. \quad (5)$$

Соответствующие решения y называют собственными функциями. Число линейно независимых собственных функций, соответствующих собственному значению λ, называется его кратностью (геометрической кратностью).

Для получения асимптотических формул необходимо рассмотреть решения $S_j(x,\lambda)$, $C_j(x,\lambda)$ следующих задач Коши на каждом ребре e_j, $j = \overline{1,m}$:

$$-S_j''(x,\lambda) + q_j(x) S_j(x,\lambda) = \lambda S_j(x,\lambda),\ S_j(0,\lambda) = S_j'(0,\lambda) - 1 = 0, \quad (6)$$

$$-C_j''(x,\lambda) + q_j(x) C_j(x,\lambda) = \lambda C_j(x,\lambda),\ C_j(0,\lambda) - 1 = C_j'(0,\lambda) = 0. \quad (7)$$

Пусть ρ такое число, что $\lambda = \rho^2$, для определённости $\arg\rho \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.Это же обозначение используется для символа λ с различными индексами, тогда те же индексы переносятся на ρ.

Известен следующий результат:

Лемма 1. *Решения задач Коши (6), (7) удовлетворяют уравнениям*

$$S_j(x,\lambda) = \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q_j(t) S_j(t,\lambda)\,dt, \tag{8}$$

$$C_j(x,\lambda) = \cos\rho x + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho} q_j(t) C_j(t,\lambda)\,dt. \tag{9}$$

Рассмотрим решение Вейля $\Phi(\lambda) = \{\phi_{jk}(x_j,\lambda)\}_{j,k=1}^m$ — матричное решение уравнения (5) размерности $m \times m$, для которого выполнены начальное условие $\{\phi_{jk}(0,\lambda)\}_{j,k=1}^m = I$, где I единичная матрица, и условия склейки (2)–(3). Матрицей Вейля называется $M(\lambda) = \{\phi'_{jk}(\pi,\lambda)\}_{j,k=1}^m$ (здесь и далее $g'(y,t)$ обозначает дифференцирование функции g по первому аргументу).

Определение 4. *Весовым числом $\alpha^k(\lambda_0)$, соответствующим собственному значению λ_0, называется вычет k-го диагонального элемента $M(\lambda)$:*

$$\alpha^k(\lambda_0) = \underset{\lambda=\lambda_0}{Res}\, M_{kk}(\lambda).$$

Доказаны следующие леммы, использованные при получении асимптотических формул для весовых чисел:

Лемма 2. *Пусть $f_k(z)$ — комплекснозначная функция, $k,n \in \mathbb{N}$, z_k — нуль f_k, и при этом*

$$f_k(z_k) = (1+\alpha_k) z_k^n + \sum_{j=1}^n c_j^k z_k^{n-j},$$

где

$$c_j^k = O(1), j = \overline{1,n},$$
$$\alpha_k = o(1)$$

при $k \to \infty$. Тогда $z_k = O(1)$ при $k \to \infty$.

Лемма 3. *Пусть*

$$(C + o(1))(z_k)^n + \sum_{s=1}^n \Theta_k^s (z_k)^{n-s} = 0,$$

где $n > 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \to \infty$. Тогда $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in l^2$ при условии, что C — ненулевая константа, $\{\Theta_k^s\}_{k=1}^\infty \in l^{2/s}$, $s = \overline{1,n}$.

Во втором разделе задана характеристическая функция и изучено асимптотичекое поведение множества собственных значений оператора L.

Пусть y является собственной функцией для некоторого λ. Так как компоненты y должны удовлетворять (1), можно записать

$$y = [a_j S_j(x_j,\lambda)]_{j=1}^m, \tag{10}$$

где не все a_j являются нулевыми. Кроме того, y удовлетворяет условиям склейки (2)–(3), и ненулевой набор $[a_j]_{j=1}^m$ существует тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda) = 0$, где

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} S_1(\pi,\lambda) & -S_2(\pi,\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & S_2(\pi,\lambda) & -S_3(\pi,\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{m-1}(\pi,\lambda) & -S_m(\pi,\lambda) \\ S_1'(\pi,\lambda) & S_2'(\pi,\lambda) & S_3'(\pi,\lambda) & \dots & S_{m-1}'(\pi,\lambda) & S_m'(\pi,\lambda) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ, так как входящие в определитель функции $S_j(x,\lambda)$, $S_j'(x,\lambda)$ являются целыми по λ. Пусть $S(\lambda) = \operatorname{diag}\{C_j(x_j,\lambda)\}_{j=1}^m$.

Определение 5. *Функция $\Delta(\lambda) = \det V(S(\lambda))$ называется характеристической функцией оператора L.*

Каждое собственное значение λ является нулем характеристической функции. Обратно, если $\Delta(\lambda) = 0$, то существует ненулевой набор $[a_j]_{j=1}^m$, для которого функция y, заданная как (10), будет собственной функцией.

Можно показать, что геометрическая кратность собственного значения λ равна его алгебраической кратности как нуля характеристической функции. Пусть λ_0 является собственным значением кратности k, то есть существуют линейно независимые собственные функции $\{y_j\}_{j=1}^k$, соответствующие λ_0. Тогда можно выбрать такую невырожденную матрицу B, что первые j столбцов произведения $Y(\lambda) = S(\lambda)B$ при $\lambda = \lambda_0$ совпадают с y_j, $j = \overline{1,k}$. Обозначим столбцы $Y(\lambda)$ за $Y_s(\lambda)$, $s = \overline{1,m}$. Ясно, что нули $\Delta(\lambda) = \det V(S(\lambda))$ совпадают с нулями $\Delta_1(\lambda) = \det V(Y(\lambda))$ с учетом их кратности. При подстановке $\lambda = \lambda_0$ в $\Delta_1(\lambda)$ первые k столбцов будут нулевыми, следовательно, кратность λ_0 как нуля не может быть меньше k. С другой стороны, если бы кратность λ_0 как нуля была бы больше k, то выполнялось бы следующее:

$$0 = \det\left[V(Y_1'(\lambda_0)), V(Y_2'(\lambda_0)), \dots, V(Y_k'(\lambda_0)), V(Y_{k+1}(\lambda_0)), \dots, V(Y_m(\lambda_0))\right].$$

Все производные существуют, так как $Y_j(\lambda)$, $V(Y_j(\lambda))$ целые по λ. Данное равенство означает линейную зависимость столбцов:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j V(Y_j'(\lambda_0)) + \sum_{j=k+1}^{m} a_j V(Y_j(\lambda_0)) = 0,$$

не все a_j нулевые. Если $a_j = 0$, $j \le k$, то получим собственную функцию $\sum_{j=k+1}^m a_j Y_j(\lambda_0)$, линейно независимую с $Y_s(\lambda_0) = y_s$, $s = \overline{1,k}$. Получим противоречие с кратностью λ_0 как собственного значения. Значит, не все a_j,

$j = \overline{1,k}$, равны нулю. В этом случае рассмотрим функцию

$$Y_+(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} a_j Y_j(\lambda) + (\lambda - \lambda_0) \sum_{j=k+1}^{m} a_j Y_j(\lambda) = 0.$$

Тогда функция $Y_+(\lambda_0)$ является присоединенной функцией. Но в случае самосопряженного оператора не существует присоединенных функций. Противоречие. Значит, кратность собственного значения λ_0 равна его кратности как нуля характеристической функции. Таким образом, можно сформулировать теорему:

Теорема 1. *Собственные значения оператора L совпадают с нулями характеристической функции $\Delta(\lambda)$. Число λ_0 является собственным значением кратности k тогда и только тогда, когда λ_0 — нуль кратности k характеристической функции.*

Показано, что

$$\Delta(\lambda) = \sum_{l=1}^{m} \left(S_l'(\pi,\lambda) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{m} S_j(\pi,\lambda) \right). \tag{12}$$

Эту формулу удобно использовать при получении асимптотических формул для весовых чисел.

В асимптотических формулах для собственных значений участвуют нули характеристического многочлена.

Определение 6. *Характеристическим многочленом называется многочлен $f'(x)$, где*

$$f(x) = \prod_{j=1}^{m} (x - \omega_j),$$

$$\omega_j = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} q_j(t)\,dt,\ \ j = \overline{1,m}.$$

Введём обозначения $\{\kappa_k\}_{k=1}^{\infty}$ для последовательностей из l^2, не обязательно одинаковых. Тогда можно сформулировать теорему:

Теорема 2. *Оператор L имеет счётное множество собственных значений. Они могут быть занумерованы таким образом, что*

$$\sqrt{\lambda_n^{(j)}} = n + \frac{z^{(j)} + \kappa_n}{n\pi}, j = \overline{1, m-1},\ \ \sqrt{\lambda_n^{(m)}} = n - \frac{1}{2} + \frac{z^{(m)} + \kappa_n}{n\pi},$$

где $n \in \mathbb{N}$, числа $\{z^{(j)}\}_{j=1}^{m-1}$ являются нулями характеристического многочлена $f'(x)$, а $z^{(m)} = \sum_{l=1}^{m} \omega_l / m$.

Доказательство Теоремы 2 основано на стандартных асимптотических формулах для $S_j(x,\lambda)$:

$$S_j(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int_0^x\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho^2}\sin\rho t\ q_j(t)dt+O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right), \tag{13}$$

$$S_j'(x,\lambda)=\cos\rho x+\int_0^x\frac{\cos\rho(x-t)}{\rho}\sin\rho t\ q_j(t)dt+O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^2}\right), \tag{14}$$

где $\tau=\operatorname{Im}\rho$. В процессе доказательства Теоремы 2 неоднократно использованы разложения Тейлора и теорема Руше. Пункты 1–2 доказательства Теоремы 2 не требуют условия $q_j(x)\in\mathbb{R}$. Однако без этого ограничения кратность собственного значения не обязательно равна кратности его как нуля характеристической функции. Можно было требовать простоту всех нулей $\{z^{(s)}\}_{s=1}^{m-1}$, и в данном случае все собственные значения были бы кратности 1. Тогда рассуждения пункта 3 Теоремы 2 для простых нулей $z^{(s)}$ также были бы верны, и мы получили бы такие же формулы для комплексного случая.

В третьем разделе установлены некоторые свойства матрицы Вейля и получены асимптотические формулы для весовых чисел.

Составим матричные решения уравнения (5) $S(\lambda)=\operatorname{diag}\{C_j(x_j,\lambda)\}_{j=1}^m$, $C(\lambda)=\operatorname{diag}\{C_j(x_j,\lambda)\}_{j=1}^m$. Так как $2m$ столбцов матричных решений $S(\lambda)$, $C(\lambda)$ образуют фундаментальную систему решений, $\Phi(\lambda)=S(\lambda)A_1(\lambda)+C(\lambda)A_2(\lambda)$. С учетом начальных условий для $\Phi(\lambda)$, $S(\lambda)$, $C(\lambda)$ при $x_j=0$, $j=\overline{1,m}$, получим $A_2=I$. С другой стороны, $A_1=M(\lambda)$ и

$$0=V(S(\lambda))M(\lambda)+V(C(\lambda)), \tag{15}$$

откуда $M(\lambda)=-[V(S(\lambda))]^{-1}V(C(\lambda))$. Использовав данное равенство, можно вычислить элементы матрицы Вейля:

$$M_{kl}(\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^m S_j(x,\lambda)C_l(x,\lambda)\right)'\Bigg|_{x=\pi}. \tag{16}$$

Элементы матрицы Вейля будут мероморфными функциями как частные двух целых функций. У элементов $M(\lambda)$ могут быть полюса только в точках, являющихся нулями $\Delta(\lambda)$.

Теорема 3. *Все полюса элементов матрицы Вейля $M(\lambda)$ являются простыми.*

Доказательство Теоремы 3 похоже на доказательство Теоремы 1, и в нем использованы ее результаты.

Пусть собственные значения занумерованы так, как в Теореме 2. Для краткости введено обозначение $\alpha^k(\lambda_n^{(j)})=:\alpha_{jn}^k$. Сформулирована следующая теорема:

Теорема 4. *Для весовых чисел выполнены формулы*

$$\sum_{j\in I(k)} \alpha^p_{jk} = \frac{2k^2}{m\pi}\left(m-1+\frac{\kappa_k}{k}\right), \tag{17}$$

$$\alpha^p_{mk} = \frac{2(k-\frac{1}{2})^2}{m\pi}\left(1+\frac{\kappa_k}{k}\right), \tag{18}$$

где $I(k)$ рассматривается как множество неповторяющихся элементов,

$$I(k) = \bigcup_{j=1}^{m-1} \min\{s : \lambda_k^{(s)} = \lambda_k^{(j)}\}.$$

При доказательстве данной теоремы были получены асимптотические формулы для элементов $M_{pp}(\rho_k^2(z))$, $\rho_k(z) = k + z/(\pi k)$ и $\rho_k(z) = k - \frac{1}{2} + z/(\pi k)$ на контурах интегрирования $|z| = R$, $R = 2 + \max\limits_{j=\overline{1,m}} |z^{(j)}|$. В силу теоремы Коши о вычетах, после интегрирования данных формул получили (17)–(18). Для доказательства Теоремы 4 недостаточно стандартных асимптотических формул для $S_j(x,\lambda)$, $C_j(x,\lambda)$. Были использованы уточненные формулы:

$$\begin{aligned} S_j(x,\rho) &= \frac{\sin\rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho^2}\sin\rho t q_j(t)dt + \\ &+ \int_0^x\int_0^t \frac{\sin\rho(x-t)q_j(t)}{\rho^3}\sin\rho(t-\xi)q_j(\xi)\sin\rho\xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^4}\right), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} S'_j(x,\rho) &= \cos\rho x + \int_0^x \frac{\cos\rho(x-t)}{\rho}\sin\rho t q_j(t)dt + \\ &+ \int_0^x\int_0^t \frac{\cos\rho(x-t)q_j(t)}{\rho^2}\sin\rho(t-\xi)q_j(\xi)\sin\rho\xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} C_j(x,\rho) &= \cos\rho x + \int_0^x \frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}\cos\rho t q_j(t)dt + \\ &+ \int_0^x\int_0^t \frac{\sin\rho(x-t)q_j(t)}{\rho^2}\sin\rho(t-\xi)q_j(\xi)\cos\rho\xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^3}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} C'_j(x,\rho) &= -\rho\sin\rho x + \int_0^x \cos\rho(x-t)\cos\rho t q_j(t)dt + \\ &+ \int_0^x\int_0^t \frac{\cos\rho(x-t)q_j(t)}{\rho}\sin\rho(t-\xi)q_j(\xi)\cos\rho\xi d\xi dt + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{\rho^2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

При доказательстве данной теоремы не использовали вещественность $q_j(x)$. Однако, без этого требования полюса $M(\lambda)$ не обязательно являются простыми, и рассмотрение весовых чисел как данных для задачи восстановления нецелесообразно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля на графе-звезде. Введены характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями данного оператора, и матрица Вейля, элементы этой матрицы — мероморфные функции с полюсами, возможными только в собственных значениях. Получены асимптотические формулы для собственных значений и весовых чисел. Формулы получены с остаточным членом κ_n/n, для собственных значений это возможно благодаря вещественности $q_j(x)$, $j = \overline{1,m}$. Эти формулы могут быть использованы при решении обратных спектральных задач. Результаты были представлены на научном семинаре.