Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СТРАХОВАНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Крыжней Татьяны Григорьевны

Научный руководитель
к. ф.-м. н. ______________ А. В. Шаталина

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы обусловлена необходимостью создания систем более эффективной оценки финансового состояния страховой компании, так же повышение уровня ее финансовой устойчивости. Развитие страхового рынка, наличие общественной потребности на страховые услуги, дают основание для постановки вопроса о необходимости построения экономико-математических моделей работы страховой компании. В данной работе рассматриваются модели имущественного страхования, так как имущественное страхование на сегодняшний день является наиболее обширной отраслью страхового рынка и главным условием эффективного функционирования страхового рынка - это надежность его страховщиков.

Рассмотрение финансовой устойчивости недостаточно полное с точки зрения разнообразия данной проблемы, но оно позволяет использовать формальные экономико-математические модели для получения объективных оценок, которые ложатся в основу принятия решения руководством страховой компании. Применение экономико-математических средств позволяют значительно повысить эффективность и обоснованность принятия решения по управлению финансовой устойчивостью в рамках основных ее характеристик - вероятности разорения, оптимизации тарифной ставки, величины начального капитала, перестраховочной политики и т.д.

Целью бакалаврской работы является построение и анализ математических моделей страхования индивидуального риска при биномиальном и полиномиальном распределениях числа аварий.

Объектом исследования являются статические модели страхования.

Предмет исследования - оптимальная величина страховых взносов.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо смоделировать работу страховой фирмы:

— взять под наблюдение величину капитала компании;

— построить оценку финансовой устойчивости;

— на основе полученной оценки определить оптимальную величину страховых взносов.

Для этого необходимо решить следующие **задачи**:

— определить необходимые понятия для описания характеристик страхового портфеля;
— определить функции распределения пригодные для описания случайных величин, таких как число исков предъявляемых страховой компании и величины ущерба;
— дать описание математической модели индивидуального риска и основных задач рассматриваемых в рамках модели;
— привести формулу для вероятности разорения статической модели страхования;
— рассмотреть постановку задачи определения оптимальной тарифной ставки;
— построить модели страхования при биномиальном и полиномиальном распределении числа аварий;
— привести сравнительный анализ построенных моделей.

Теоретической основой послужила совокупность научных представлений и концепций отечественных и зарубежных ученых по вопросам актуарной математики, построения моделей страхования, таких как Фалин Г.И. [1], Бауэрс Н. [2], Голубин А.Ю. [3], Королев В.Ю. [4], Лаврентьева Л.В. [5], Лившиц К.И. [6], Бондарев Б.В. [7].

При компьютерном моделировании теоретическую основу составили Дорофеев Н.В. [8].

Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, раздела, содержащие обозначения, трех теоретических разделов и одного практического, заключения, списка использованных источников и двух приложений.

Введение содержит основные положения: обоснования актуальности темы работы, формулируется цель, объект и предмет исследования.

В **первом** разделе приводятся обозначения используемые в работе.

Во **втором** разделе приводятся основные факты из теории вероятности, необходимые для описания характеристик страхового портфеля.

В **третьем** разделе рассматриваются распределения пригодные для описания числа требований к страховой компании и величины ущерба. При наступлении страхового случая страховая компания обязана произвести выплату клиенту. У компании имеются некоторые статистические данные, при помощи которых можно рассчитать оценки для среднего и дисперсии числа исков. Т.е. известны фактические значения величины за некоторый промежуток времени в прошлом. Возникает задача подбора такого распределения вероятностей для числа исков, которое бы соответствовало бы наблюдаемым значениям с заданной точностью. Наиболее часто используют следующие распределения:

1. Биномиальное распределение. В этом случае вероятность того что произойдет страховое событие одинакова для всех страховых случаев рассматриваемого портфеля.
2. Если за рассматриваемый промежуток времени среднее число выплат является некоторым постоянным числом, то в этом случае предпочитают использовать для описания числа выплат распределение Пуассона.

Пусть известны фактические значения ущерба, который был нанесен в результате страхового случая. Тогда можно считать, что известны оценки возможных потерь в результате наступления страхового случая, то есть известны выборочные оценки среднего значения и дисперсии случайной величины описывающую ущерб. Тогда, ставится задача подбора такого распределения для описания ущерба, которое наилучшим образом отвечало бы фактическим данным. В актуарной математике чаще всего применяются следующие непрерывные распределения для описания убытка по одному страховому случаю и по одному договору:

1. Равномерное распределение. Но в ряде реальных случаев равномерное распределение не подходят для описания размера причиненного ущерба, так как на практике выплаты разных размеров имеют разную вероятность появления.
2. Экспоненциальное распределение. Если предполагается экспоненциальное распределение для выплат, то подразумевается возможность очень больших значений убытков, но плотность экспоненциального распределения является быстро убывающие функцией x, это говорит о том, что вероятность больших значений страховых выплат становится ничтожно малой.

   Для экспоненциального распределения характерно большое число небольших исков, и возможность редких крупных исков, то есть оно асимметрично.
3. Распределение Парето. Для распределения Парето характерна достаточна высокая вероятность больших значений выплат.

Четвертый раздел посвящен описанию модели индивидуального риска: введены основные предположения модели, приведена формула для вероятности разорения статической модели страхования, приведена постановка задачи оптимальной тарифной ставки.

Рассматривается портфель договоров одинаковых по протяженности, равной единице времени. В рассматриваемых в работе случаях временная переменная отсутствует, поэтому рассматриваемые модели являются статическими.

Предположения модели:

1. Число договоров, т.е. число застрахованных, фиксировано и не случайно;
2. Риски являются независимыми между собой;
3. Страховой взнос вносится страхователем полностью в начале периода;
4. Размер выплат(требований) в результате наступления страхового события выплачивается полностью и сразу;
5. Выплаты одинаково распределены и независимы;
6. Для всех договоров портфеля считается, что распределение потерь оди-

наково.

Решение задачи при вычислении вероятности разорения в условиях модели индивидуального риска сводится к вычислению вероятности превышения суммарных выплат по всем искам страхового портфеля. В этом случае требуется применение разных вариантов центральной предельной теоремы.

При планировании страховой деятельности, в некоторых ситуациях, допустимо считать, что количество договоров в портфеле, объединенных по тем или иным параметрам, является фиксированным. В некоторых случаях количество договоров заранее не известно.

Так как на практике страховая компания ведет работу с несколькими портфелями, целесообразно считать, что неопределенность объема страхового портфеля является проявлением случайности. В таком случае, естественно считать, что объем портфеля является целочисленной случайной величиной N. Тогда, возникает необходимость правильного подбора распределения этой случайной величины.

В моделях рассматриваемых в работе считается, что число договоров, т.е. число застрахованных, фиксировано и не случайно.

Разорение страховой компании определяется суммарными выплатами каждому застрахованному в случае аварии. Если суммарные выплаты превысят капитал компании u, то компании не будет в состоянии выполнять свои обязательства перед страхователем. Таким образом вероятность разорения:

$$P\{\sum_{i=1}^{N} \eta_i > u\}.$$

Так как η это сумма независимых случайных величин, тогда распределение величины η можно подсчитать с помощью методов теории вероятности и классических теорем.

Для упрощения подсчета вероятности разорения часто используют производящие функции или преобразования Лапласа.

Общеизвестный результат, справедливый для статической модели страхования в случае, когда страховые премии предполагаются одинаковыми формулируется следующим образом:

Пусть имеется $N-$ застрахованных, $c_j = c$ для всех $j = 1, \dots N$,

η_j- величина $j-$ого ущерба. Резерв компании, к моменту завершения действия всех договоров завершилось, составляет:

$$R = cN - \sum_{j=1}^{N} \eta_j.$$

Пусть первые два момента случайной величины ξ_j существуют и конечны:

$$E\eta_j = \alpha \text{ и } D\eta_j = \sigma^2,$$

число N достаточно велико, тогда распределение случайной величины η_j можно аппроксимировать соответствующим нормальным распределением с заданной точностью.

При выше приведенных условиях справедлива следующая формула:

$$P\Big(\sum_{j=1}^{N} \xi_j \leq x\Big) \sim \Phi\Big(\frac{x - \alpha N}{\beta\sqrt{N}}\Big).$$

$$P\Big(\sum_{j=1}^{N} \eta_j \leq cN\Big) \sim \Phi\Big(\frac{c - \alpha}{\beta\sqrt{N}}\Big).$$

Постановка задачи определения оптимальной страховой ставки выглядит следующим образом.

Пусть число договоров, входящих в портфель страхования N.

$$\bar{c} = \sum_{j=1}^{N} c_j -$$

сумма страховых взносов собранных по страховому портфелю .

$$\eta = \sum_{j=1}^{N} \eta_j -$$

сумма возмещений. Пусть $u-$ начальный страховой фонд.

Тогда величина страхового фонда на данный момент времени равна

$$R = u + \bar{c} - \eta.$$

В связи с описанной моделью возникает задача определить такое минимальное значение , чтобы результаты страховой деятельности по данному страховому портфелю были приемлемы для страховщика.

Основные условия определения страховой ставки :

1. условие средней безубыточности

$$c_j \geq M\eta_j; \tag{1}$$

2. условие итогового разорения, при этом условии ставка должна быть определена таким образом, что бы выполнялось неравенство

$$P(R \geq 0) \geq Q, \tag{2}$$

   где $Q-$ некоторая заранее заданное значение,выбирающееся самим страховщиком и представляющее собой минимальную допустимую вероятность для страховщика "итогового разорения". Рекомендуемые значения Q равны 0.9 и 0.95

При расчёте ставки страхового тарифа по отдельным видам страхования производится расчёт двух её составляющих: нетто-ставки и нагрузки. Нетто-ставка рассчитывается на основании статистической вероятности наступления страхового случая и равна: $M\eta_j$. Тогда оптимальная тарифная ставка рассчитывается следующем образом

$$c_j = M\eta_j + \delta,$$

где $\delta-$добавачная нагрузка.

В **пятом** разделе рассматривается построение статических моделей страхования основанных на биномиальном и полиномиальном распределениях числа аварий. Модели рассматриваются в случае без начисления процентов и в случае, когда страховая компания сочетает в себе функцию банка, в частности, происходит начисление процентов.

Основная задача: определить минимальную цену страхового полиса при заданном уровне разорения страховой компании, при этом, цена определяется из условия средней безубыточности.

Биномиальная модель строится следующим образом. Пусть, имеется группа из N застрахованных. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A, либо не произойти - $\bar{A}$. Случайная величина ν_n- число наступлений событий A в серии из n независимых испытаний.

Величина ущерба ξ не зависит от ν_n, и $\xi_i, i = 1, \ldots, n$ независимы между собой, распределение выплат ξ известно. Показано, что для среднего и дисперсии величины η_i справедливы следующие формулы:

$$M\eta_i = npa,$$

$$D\eta_i = \sigma^2 np + a^2 npq.$$

Если застраховано N клиентов, каждый из которых заплатил $c = anp+ \delta$, $\delta-$нагрузка, тогда для нахождения нагрузки справедлива следующая формула:

$$\delta = \frac{x_\alpha \sqrt{\sigma^2 np + npqa^2}}{\sqrt{N}}.$$

Если страховая компания сочетает в себе еще и функцию банка. Начисляются простые проценты, годовая процентная ставка $r > 0$, тогда нагрузка вычисляется по формуле:

$$\delta' = \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \sqrt{c^2(1+r^2)q^n(1-q^n) + \sigma^2 np + a^2 npq}.$$

Модели основанная на полиномиальном распределении числа аварий, строится следующим образом. Проводится n независимых испытаний. В каждом из испытаний может произойти одно из $m+1$ событий

$$A_0, A_1, \ldots, A_m \text{ т.е. } \Omega = A_0 \cup \cup_{k=1}^m A_k.$$

Множество $A_i = [y_i, y_{i+1})-$интервал, в который попадает величина иска при аварии, если ξ_k- величина иска в "$k-$"ый день года в пределах от y_i до y_{i+1}.

Пусть A_0-множество, при попадании в которое величина иска не принимается к рассмотрению. Если же величина иска попадает в множество

$A_i = [y_i, y_{i+1})$, то клиенту выплачивается средняя сумма $z_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$. Пусть вероятность попадания во множество $A_0, A_1, \ldots, A_m$ соответственно равны

$$p_0 = P(A_0), p_1 = P(A_1), \ldots, p_m = P(A_m).$$

$\{\nu^n\}_{i=0}^m$ - число попаданий исков во множество $A_0, A_1, \ldots, A_m$ соответственно. Это означает, что ν_0^n раз величина исков попадала в множество A_0, ν_1^n раз попаданий было в множество A_1, то есть величина исков находилась в пределах от y_1 до y_2, и т.д., следовательно ν_m^n раз иски принадлежали множеству A_m.

Если клиент за время застрахованности n ни разу не обращался в страховую компанию, то окончанию срока ему возвращается цена страхового полиса c с учетом процентов, то есть $c(1+r)$.

Показано, что для математического ожидания и дисперсии выплат клиенту справедлива формула:

$$M\eta_i = c(1+r)e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} + \sum_{i=1}^m z_i \lambda_i,$$

$$D\eta_i = c^2(1+r)^2 e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)}[1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)}] +$$
$$+ \sum_{i=1}^m z_i^2 \lambda_i - 2c(1+r)e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} \sum_{i=1}^m z_i \lambda_i$$

Цена страхового полиса в этом случае находится по формуле

$$c = c(1+r)e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} + \sum_{i=1}^m \lambda_i z_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{N}} \big(e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)} \big[1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m)}\big] c^2(1+r)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^m z_i^2 \lambda_i - 2c(1+r)e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_m))} \sum_{i=1}^m z_i \lambda_i \big)^{\frac{1}{2}} - \frac{u}{N}. \tag{3}$$

Шестой раздел содержит сравнительный анализ рассмотренных моделей страхования.

Начальные данные :

1. число проводимых испытаний $n = 300$,
2. число возможных событий $r = 16$,

3. параметр биномиального распределения $p = 0.06$,
4. число застрахованных $N = 1000$,
5. начальный капитал компании $u = 1000$,
6. процентная ставка $i = 0.1$
7. значения функции Лапласа $x_\alpha = 1.65$, при уровне разорения $\alpha = 0.05$

Для сравнения моделей основанные на биномиальном и полиномиальном распределении числа аварий программным путем были подсчитаны цены страховых полисов. Для подсчета были использованы результаты приведенные в четвертом разделе.

Более наглядно полученные результаты можно представить в таблице.

Цена страхового полиса

Капитал	**Проценты**	**Биномиальное распределение** (без франшизы)	**Биномиальное распределение** (с франшизой)
Нет	**Нет**	9.087	-
Нет	**Есть**	7.088	-
Есть	**Есть**	7.682	6.072

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Имущественное страхование на сегодняшний день является наиболее обширной отраслью страхового рынка и главным условием эффективного функционирования страхового рынка - это надежность его страховщиков. Главным в реализации процесса страхования является его финансовая устойчивость, то есть поддержание способности любого страховщика, действующего на рынке, выполнять взятые на себя обязательства своевременно и в полном объеме.

В данной работе были рассмотрены модели страхования индивидуального риска и приведены расчеты оптимальной величины страховых взносов для полиномильного и биномиального распределения числа аварий.

Таким образом, цель бакалаврской работы достигнута и реализованы все поставленные задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 *Фалин,* . Теория риска / . Фалин, . Фалин. — Москва: Мир, "Научный мир 2004. — С. 240.

2 *Бауэрс,* . // Актуарная математика / Ed. by . Малиновского. — Москва: Янус-К, 2001. — P. 685.

3 *Голубин,* . Математичсекие модели в теории риска: построение и оптимизация / . Голубин. — Масква: Анкил, 2003. — С. 160.

4 *Королев,* . Математические основы теории риска. 2-е издание, переработанное и дополненное / . Королев, . Бенинг, . Шоргин. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — С. 620.

5 *Лаврентьева,* . Применение акуарных расчетов в рисковых видах страхования: уч.пособие. / . Лаврентьева. — Нижний Новогород: Изд-во ВГИПУ, 2008. — С. 92.

6 *Глухова,* . Математические модели страхования / . Глухова, . Змеев, . Лившиц. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 2004. — С. 180.

7 *Бондарев,* . Математические модели страхования / . Бондарев. — Донецк: АПЕКС, 2002. — С. 118.

8 *Дорофеев,* . Компьютерное и имтационное моделирование / . Дорофеев. — Муром: Изд-во ВГУ им.Столетовых, 2014. — С. 83.